Tópicos en Teoría de los Juegos

Universidad del CEMA
Buenos Aires, Agosto de 2008

Gustavo Torrens
Department of Economics
Washington University in St. Louis

5. Anti-refinamientos

Referencias

Las transparencias del tópico 5 están basadas sobre el capítulo 3 del libro "*A course in Game Theory*" de Osborne y Rubinstein (1994), el capítulo 2 del libro "Game Theory" Fundenberg y Tirole (1992) y notas de clases de Levine (otoño 2008).

5. Anti-refinamientos

I. Equilibrio Correlacionado

Motivación: Imaginemos que antes de jugar un juego en forma normal los jugadores pueden juntarse y luego cada uno vuelve a una habitación separada donde decide su estrategia. Es posible que los jugadores encuentren conveniente construir un "mecanismo" que envíe señales a los jugadores (signaling device)

Ejemplo 1: un ejemplo de Aumman

	L	*D*
U	5,1	0,0
D	4,4	1,5

Dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (U, L), (D, R)

Un equilibrio en estrategias mixtas: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y cada jugador obtiene $2{,}5$

Pero si los jugadores construyen un mecanismo que consta simplemente en arrojar una moneda y si sale cruz jugar (U, L), mientras que si sale cara jugar (D, R) entonces cada jugador puede obtener 3.0

Pero pueden lograr algo mejor que esto aun, si construyen un mecanismo que envíe señales diferentes, pero correlacionadas.

5. Anti-refinamientos

Más formalmente tenemos distintos tipos de señales

- Señales privadas e independientes
- Señales publicas/perfectamente correlacionadas
- Señales parcialmente correlacionadas (que incluyen las dos anteriores como casos especiales)

La noción de equilibrio correlacionado intenta capturar que sucede con un juego cuando los jugadores pueden construir mecanismos que envían cualquier tipo de senal, privadas, públicas o parcialmente correlacionadas.

Definición 1: Un equilibrio correlacionado del juego en forma normal $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ consiste de:

- Un espacio de probabilidad finito (Ω, π) (Ω es el conjunto de estados y π es la función de probabilidad sobre Ω)
- Para cada jugador $i \in N$ una partición $\mathcal{P}_i$ de Ω (la partición de información del jugador i)
- Para cada jugador $i \in N$ una función $\sigma_i : \Omega \to A_i$ con $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ siempre que $\omega \in P_i$ y $\omega' \in P_i$ para algún $P_i \in \mathcal{P}_i$ (σ_i es la estrategia del jugador i)

tal que para todo $i \in N$ y toda función $\tau_i : \Omega \to A_i$ para la cual $\tau_i(\omega) = \tau_i(\omega')$ siempre que $\omega \in P_i$ y $\omega' \in P_i$ para algún $P_i \in \mathcal{P}_i$ (esto es para toda estrategia del jugador i) se cumple:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\tau_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega))$$

5. Anti-refinamientos

Nota 1: Notemos que el espacio de probabilidad es parte de la definición de equilibrio. Es por ello que algunas autores prefieren fijar el espacio de probabilidades y hablar de un equilibrio correlacionado relativo al espacio de probabilidades que fijamos (ver por ejemplo Fudenberg y Tirole 1992). No es el enfoque que seguiremos aquí.

Nota 2: La definición 1 requiere que los jugadores maximicen su pago esperado ex ante, es decir antes de conocer el conjunto P_i dentro del cual se encuentra el verdadero estado del mecanismo que envía señales. Alternativamente podemos emplear la regla de Bayes para calcular la posterior de cada jugador de la siguiente forma: $\pi(\omega|P_i) = \pi(\omega)/\pi(P_i)$ si $\omega \in P_i$ y $\pi(\omega|P_i) = 0$ si $\omega \notin P_i$. (nuevamente estamos usando la Doctrina Harsanyi, las mismas priors para todos, pero no todos tienen las mismas creencias porque no todos reciben la misma información)

5. Anti-refinamientos

Definición 1 bis: Un equilibrio correlacionado del juego en forma normal $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ consiste de:

- Un espacio de probabilidad finito (Ω, π) (Ω es el conjunto de estados y π es la función de probabilidad sobre Ω)
- Para cada jugador $i \in N$ una partición $\mathcal{P}_i$ de Ω (la partición de información del jugador i)
- Para cada jugador $i \in N$ una función $\sigma_i : \Omega \to A_i$ con $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ siempre que $\omega \in P_i$ y $\omega' \in P_i$ para algún $P_i \in \mathcal{P}_i$ (σ_i es la estrategia del jugador i)

tal que para todo $i \in N$ y para todo P_i tal que $\pi(P_i) > 0$ se cumple:

$$\sum_{\omega \in P_i} \pi(\omega|P_i) u_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega \in P_i} \pi(\omega|P_i) u_i(a_i, \sigma_{-i}(\omega)) \quad \forall a_i \in A_i$$

Nota 3: Ahora cada jugador maximiza el pago esperado condicional a P_i para cada P_i con probabilidad positiva.

5. Anti-refinamientos

Algo que resulta un tanto raro del equilibrio correlacionado es que existen infinitos espacios de probabilidad que podemos considerar. Por lo tanto el conjunto de los equilibrios correlacionados parece inmanejable. Afortunadamente tenemos la siguiente proposición que también también ayuda a una mejor comprension e interpretación del concepto de equilibrio correlacionado.

Proposición 1: Sea $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego en forma normal finito. Toda distribución de probabilidad sobre los resultados del juego que pueden ser obtenidos como un equilibrio correlacionado de $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ puede obtenerse en un equilibrio correlacionado en el cual el conjunto de estados es A y para cada jugador $i \in N$ la partición de información de i consiste de todos los conjuntos de la forma $\{a \in A : a_i = b_i\}$ para algún $b_i \in A_i$.

Nota 4: La idea de la proposición es que para computar los perfiles de pagos en los equilibrios correlacionados podemos focalizar nuestra atención en el conjunto de estados formado por los resultados del juego.

Nota 5: Empleando la proposición anterior podemos redefinir un equilibrio correlacionado de la siguiente forma alternativa:

Definición 2: Un equilibrio correlacionado del juego en forma normal finito $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es una distribución de probabilidad π sobre los resultados del juego, es decir el conjunto A, tal que para cada jugador $i \in N$ y toda función $d_i : A_i \to A_i$ tenemos:

$$\sum_{a \in A} \pi(a) u_i(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a \in A} \pi(\omega) u_i(d_i(a_i), a_{-i})$$

5. Anti-refinamientos

Nuevamente empleando la regla de Bayes podemos reformular la definición 2

Definición 2 bis: Un equilibrio correlacionado del juego en forma normal finito $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es una distribución de probabilidad π sobre los resultados del juego, es decir el conjunto A, tal que para cada jugador $i \in N$ y todo $a_i \in A_i$ tal que $\pi(a_i) > 0$ se cumple:

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi(a_{-i}|a_i) u_i(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi(a_{-i}|a_i) u_i(a_i', a_{-i}) \quad \forall a_i' \in A_i$$

Interpretación: En un equilibrio correlacionado cada jugador no debería poder mejorar desobedeciendo la recomendación de jugar a_i si todos los otros jugadores obedecen sus respectivas recomendaciones.

5. Anti-refinamientos

Ejemplo 1: para el ejemplo de Aumman podemos probar que $(U,L)\frac{1}{3}$, $(D,L)\frac{1}{3}$ y $(D,R)\frac{1}{3}$ es un equilibrio correlacionado.

5. Anti-refinamientos

Del ejemplo de Aumman podemos sacar algunas ideas y preguntas interesantes.

1. Notemos que los equilibrios de Nash son Equilibrios correlacionados
2. Notemos que si queremos obtener cualquier combinación convexa de los equilibrios de Nash podemos hacerlo con señales perfectamente correlacionadas, es decir para esto basta con señales públicas.
3. Pero como equilibrio correlacionado podemos obtener más que combinaciones de los equilibrios de Nash.

Las siguientes proposiciones generalizan estas intuiciones:

Proposición 2: Todo equilibrio de Nash es un equilibrio correlacionado.

Demostración: simplemente recomendar jugar el equilibrio de Nash.

Corolario: Todo juego en forma normal tiene al menos un equilibrio correlacionado

Proposición 3: Empleando variables aleatorias que se observan públicamente los jugadores pueden obtener cualquier vector de pagos en la capsula convexa de los pagos en los equilibrios de Nash. Mas aun los jugadores no pueden obtener nada fuera de la capsula convexa de los pagos en los equilibrios de Nash empleando variables aleatorias públicamente observables.

5. Anti-refinamientos

Racionalidad Bayesiana y Equilibrio Correlacionado

Un resultado interesante conectado con equilibrio correlacionado es el siguiente Teorema que se debe a Aumman 1987

La idea es establecer una conexión entre la teoría de decisión bayesiana y la teoría de los juegos

Teorema 1: Sea un juego en forma normal. Si cada jugador es racional en el sentido de Bayes en cada estado de la naturaleza, esto es maximiza su pago esperado dada la información que dispone, entonces la distribución de probabilidad que juegan es un equilibrio correlacionado.

La moraleja fundamental de este teorema es que como consecuencia de la racionalidad bayesiana debemos esperar un equilibrio correlacionado. Un equilibrio de Nash, que es algo más fuerte que el equilibrio correlacionado, agrega algo más allá de la racionalidad bayesiana. Ese algo más allá son las conjeturas correctas sobre lo que están haciendo los rivales.

Otra cuestión que es interesante de este paper es que trata la incertidumbre sobre la naturaleza y sobre el comportamiento de los otros de la misma forma. Esto es solamente un comentario.

5. Anti-refinamientos

II. Self Confirming Equilibrium

Recordemos que cuando interpretamos el equilibrio de Nash mencionamos que en un equilibrio de Nash cada jugador es racional y además tiene conjeturas correctas sobre las estrategias de sus rivales. Sin embargo, en la definición que usamos de equilibrio de Nash no aparecen las conjeturas. La idea es **introducir las conjeturas de los jugadores explícitamente** para comprender más detalladamente cuales son los supuestos implícitos en la noción de equilibrio de Nash. Como consecuencia de esta discusión vamos a definir un **nuevo concepto de equilibrio más débil que Nash.**

- **De las estrategias mixtas a las estrategias de comportamiento**

Definición 3: Tomemos como punto de partida un juego en forma extensiva. Sea σ un perfil de estrategias mixtas en dicho juego. Definamos la siguiente función.

$$\hat{\pi}: \times_{i \in N} \Delta(S_i) \to \times_{i \in N} \times_{I_i \in \mathfrak{I}_i} \Delta\big(A(I_i)\big)$$

$$\hat{\pi}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \Big(\big(\beta_1(I_1)\big)_{I_1 \in \mathfrak{I}_1}, \dots, \big(\beta_n(I_n)\big)_{I_n \in \mathfrak{I}_n}\Big)$$

En palabras, la función $\hat{\pi}$ asigna a cada perfil de estrategias mixtas $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ un perfil de estrategias de comportamiento $\Big(\big(\beta_1(I_1)\big)_{I_1 \in \mathfrak{I}_1}, \dots, \big(\beta_n(I_n)\big)_{I_n \in \mathfrak{I}_n}\Big)$ que genera la misma distribución de probabilidad sobre las historias terminales que el perfil de estrategias mixtas.

5. Anti-refinamientos

- **Creencias o conjeturas sobre las estrategias mixtas de los rivales**

Definición 4: Sea μ_i la función de creencias o conjeturas del jugador i. Formalmente,

$$\mu_i : \times_{j \neq i} \times_{I_j \in \mathfrak{I}_j} \Delta\left(A(I_j)\right) \rightarrow [0,1]$$

Es decir, μ_i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias de comportamiento de los rivales de i.

Nota 6: Esto parece muy complejo, pero en realidad simplemente estamos diciendo que cada jugador se forma una creencia sobre lo que pueden hacer sus rivales. Recordemos que cada jugador tiene incertidumbre acerca del comportamiento de los demás. Aquí la idea es poner esto explícitamente.

- **Perfil de estrategias de comportamiento de los rivales compatibles con un perfil de estrategias mixtas de los rivales.**

Definición 5: Definamos el conjunto de perfiles de estrategias de comportamiento de los rivales de i compatibles con el perfil de estrategias mixtas de los rivales de i σ_{-i} en todos los conjuntos de información de la siguiente manera:

$$\mathrm{B}(\sigma_{-i}) = \{\beta_{-i} : \beta_{-i} = \hat{\pi}(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ para algún } \sigma_i, \forall h \in H_{-i}\}$$

Nota 7: notemos que las estrategias de comportamiento de los rivales deben ser compatibles con las estrategias mixtas de los rivales en cualquier historia del juego en la que los rivales son llamados a jugar tanto en la trayectoria de equilibrio como fuera de la misma.

5. Anti-refinamientos

Equilibrio de Nash empleando esta notación

Definición 6: Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias mixtas σ^* tal que para cada $s_i \in supp(\sigma_i^*)$ (es decir para cada estrategia pura que se emplea con probabilidad positiva) existe una creencia μ_i tal que

1. $U_i\big(O(\hat{\pi}_i(s_i),\mu_i)\big) \geq U_i\big(O(\hat{\pi}_i(s_i'),\mu_i)\big)$ para todo $s_i' \in S_i$
2. $\mu_i\big(\mathrm{B}(\sigma_{-i})\big) = 1$

Interpretación del punto 1: toda estrategia pura que se emplea con probabilidad positiva es la mejor respuesta a alguna creencia sobre el comportamiento de los rivales. Notemos que en principio distintas estrategias puras pueden estar sostenidas por diferentes conjeturas sobre el comportamiento de los rivales.

Interpretación del punto 2: las conjeturas sobre el comportamiento de los rivales son correctas. Notemos que producto que las conjeturas son correctas todas las estrategias puras deben estar soportadas por la misma conjetura, haciendo irrelevante la aclaración al final del punto 1.

5. Anti-refinamientos

La redefinición anterior nos sugiere un concepto de equilibrio más débil que el Equilibrio de Nash.

¿Qué sucede si buscamos solamente las estrategias de comportamiento de los rivales compatibles con las estrategias mixtas, pero solamente para los conjuntos de información que son alcanzados con probabilidad positiva cuando se juega el perfil de estrategias mixtas en cuestión?

Definición 7: Sea $\overline{H}(\sigma)$ el subconjunto de H formado por las historias que pertenecen a conjuntos de información que son alcanzados con probabilidad positiva si se juega el perfil de estrategias mixtas σ.

Definición 8: Definamos el conjunto de perfiles de estrategias de comportamiento de los rivales de i compatibles con el perfil de estrategias mixtas de los rivales de i σ_{-i} en los conjuntos de información que son alcanzados con probabilidad positiva de la siguiente manera:

$$\overline{\mathrm{B}}(\sigma_{-i}) = \{\beta_{-i} : \beta_{-i} = \hat{\pi}(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ para algún } \sigma_i, \forall h \in H_{-i} \cap \overline{H}(\sigma)\}$$

5. Anti-refinamientos

Self-Confirming Equilibrium

Definición 8: Un Self-Confirming Equilibrium es un perfil de estrategias mixtas σ^* tal que para cada $s_i \in supp(\sigma_i^*)$ (es decir para cada estrategia pura que se emplea con probabilidad positiva) existe una creencia μ_i tal que

1. $U_i\left(O(\hat{\pi}_i(s_i), \mu_i)\right) \geq U_i\left(O(\hat{\pi}_i(s_i'), \mu_i)\right)$ para todo $s_i' \in S_i$

2. $\mu_i\left(\mathrm{B}(\sigma_{-i})\right) = 1$.

Interpretación punto 1: ver interpretación punto 1 en la definición de equilibrio de Nash.

Interpretación punto 2: Ahora las conjeturas sobre el comportamiento de los rivales solamente deben ser correctas en la trayectoria de equilibrio, pero no necesariamente fuera de la trayectoria de equilibrio. Por lo tanto las conjeturas sobre el comportamiento de los otros fuera del equilibrio pueden diferir entre los jugadores.

5. Anti-refinamientos

Conexión con aprendizaje

Para entender porque todo esto puede ser relevante. En el equilibrio de Nash si el jugador i juega σ_i^* continuamente nunca va a aprender sobre el comportamiento de sus rivales fuera de la trayectoria de equilibrio. Sin embargo, Nash fuerza a que el jugador i tenga una conjetura correcta aún en los conjuntos de información fuera de equilibrio. Es decir, implícitamente estamos asumiendo que los jugadores no solamente han aprendido pasivamente, es decir jugando la estrategia de equilibrio, sino también activamente, es decir experimentando qué sucede fuera del equilibrio. Self-Confirming Equilibrium relaja este supuesto que es realmente muy fuerte.

5. Anti-refinamientos

Ejemplo 2 (Fudenberg y Levine 1993):