



**EL CONCEPTO DE
ARBITRAJE
EN MODIGLIANI-MILLER
Y EN LA TEORÍA
FINANCIERA MODERNA**

Marcelo Perillo (UADE/UCEMA)

mperillo@uade.edu.ar

mperillo@cema.edu.ar

- Junio 2008 -





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- TEMARIO:

- BREVE RESEÑA DE LA GÉNESIS DEL TRABAJO

- ARGUMENTO DE ARBITRAJE

- PRECEDENTES DEL ARGUMENTO DE NA A M^2 .

- ARGUMENTO DE NA EN M^2 .

- DEFINICIÓN E IMPLICANCIAS DEL CONCEPTO DE NA EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA.

- APLICACIONES DE LAS DEFINICIONES MODERNAS DEL CONCEPTO DE NA A LA DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN I DE M^2 .

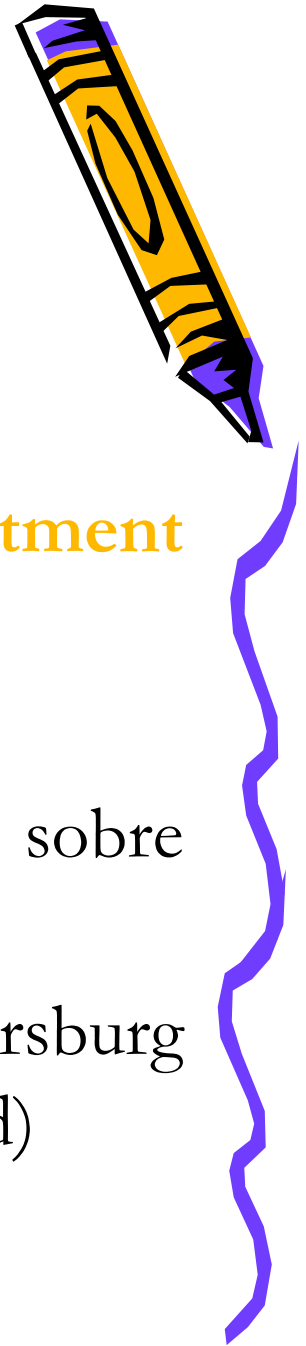




MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

• GÉNESIS DEL TRABAJO

- 1938 – “**Law of the Conservation Investment Value**” (William)
- 1952 - Conferencia de la NBER:
 - Efectos de la disponibilidad de fondos sobre la inversión (Modigliani)
 - “Growth stocks and the Petersburg Paradox”: *The Entity Theory* (Durand)





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

• GÉNESIS DEL TRABAJO

- 1956 – Inicios de Miller en Finanzas Corporativas:

➤ Markowitz y Tobin desde la vereda de enfrente o la otra cara de la moneda: la oferta de papeles (Miller).

➤ Objetivo de la Firma relacionado con la estructura de capital: Encontrar la combinación de deuda y equity que persuadiría a los inversores a pagar el mayor precio posible por los papeles de la Compañía (Miller).





MODIGLIANI-MILLER

• 50 AÑOS DESPUÉS • GÉNESIS DEL TRABAJO

- 1956 – Modigliani presenta en su clase de macroeconomía, a la cual asiste Miller, su idea sobre la Entity Theory y una prueba matemática.
- Miller reconoce que allí se encontraba la respuesta al problema del costo del capital que estaba investigando.





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

• GÉNESIS DEL TRABAJO

–1958 – Aparición del Trabajo en AER: Problemas desde el inicio

- Trabajo conjunto
- El recorte del trabajo
- La barra sobre la x
- La respuesta hostil de Durand en AER (1959)

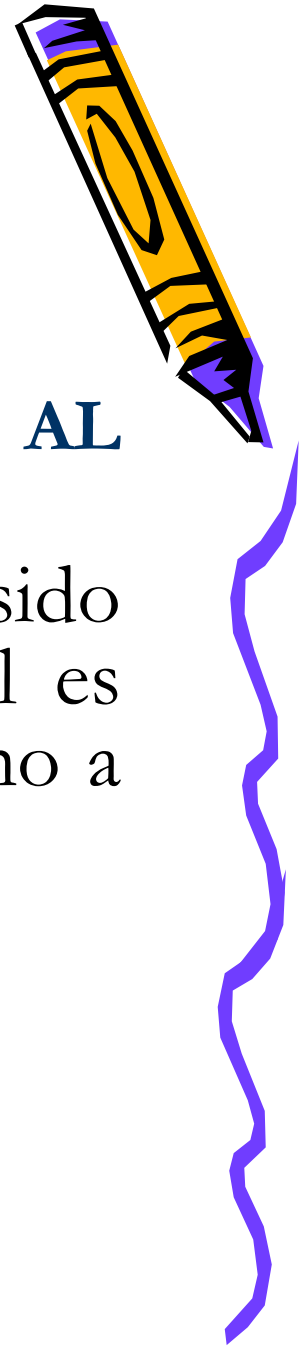




MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

- **CRÍTICA MÁS FRECUENTE AL TRABAJO**

– La crítica de la teoría no ha sido dirigida a su lógica interna, la cual es indiscutible dados los supuestos, sino a su significancia empírica.





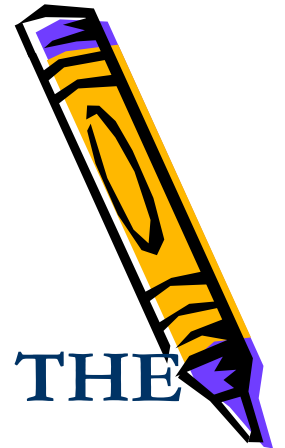
MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- THE WORD THAT CHANGE THE WORLD: ARBITRAGE

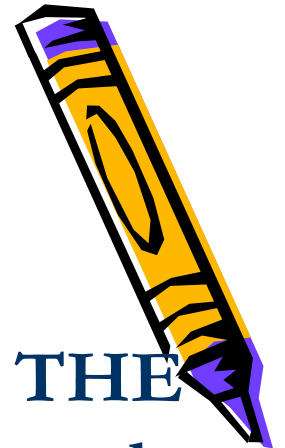
Se ha dicho que uno podría convertir a un **LORO** en **ECONOMISTA** enseñándole a decir **OFERTA Y DEMANDA.**

Podríamos también convertirlo en **FINANCIERO** enseñándole a decir **ARBITRAJE.**



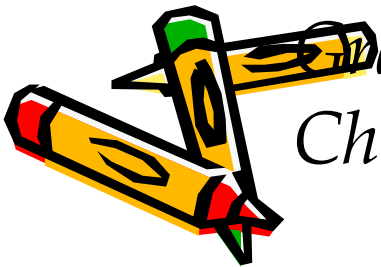


MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS



- THE WORD THAT CHANGE THE WORLD: ARBITRAGE – La segunda contribución de M²

*“The justly famous Modigliani-Miller(1958) theorem represents a brilliant application of the no-arbitrage restriction and marks the beginning of **MODERN FINANCE**. The key concept introduced by Modigliani and Miller is that of a risk class or spanning” (Constantinides G. – Graduate School of Business of the University of Chicago)*





MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

- THE WORD THAT CHANGE THE WORLD: ARBITRAGE – La segunda contribución de M²

“We can see now that MM’s real and enduring contribution was to point other in the direction of arbitrage reasoning as the most fundamental tool to derive results in financial economics” – Rubinstein M.





MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

- THE WORD THAT CHANGE THE WORLD: ARBITRAGE – La segunda contribución de M²

*“The **arbitrage** approach was the decisive distinction between our approach and those of our predecessors, David Durand and John Burr Williams.... If it did not hold the capital markets would be grossly and consistently violating one of the most venerable tenets of economics, to wit, the **Law of One Price**” (Miller)*





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- **GÉNESIS DEL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN FINANZAS – Antecedentes más cercanos al trabajo.**

- **The Theory of Interest: Its Nature, Determination and Relation to Economic Phenomena (1907) – Irving Fisher**

Utiliza un argumento de arbitraje para justificar por qué el valor presente del cashflow de un proyecto de inversión debe ser igual al valor presente del cashflow de un portafolio de activos construido para matchear el proyecto.

- **The Economics of Exhaustible Resources (1931) – Harold Hotelling**

Explica que el precio de un recurso no renovable debería crecer a la tasa de interés para impedir oportunidades de ganancias producto del diferimiento de la extracción del recurso.



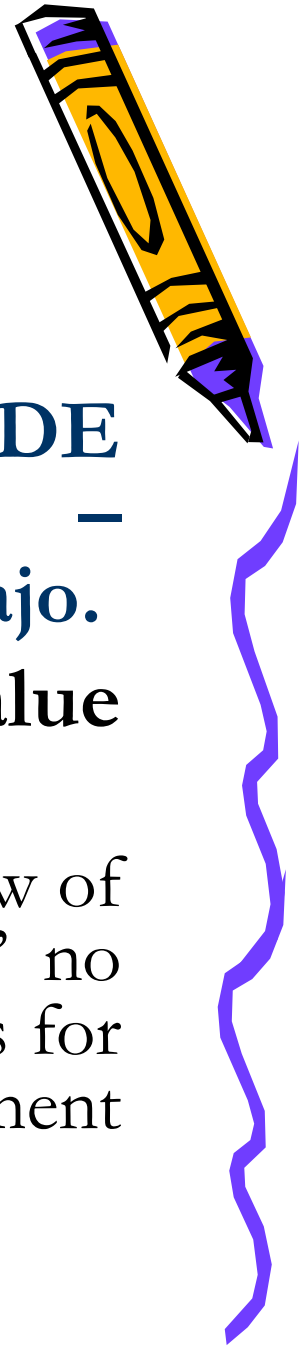


MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

- GÉNESIS DEL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN FINANZAS – Antecedentes más cercanos al trabajo.

- The Theory of Investment Value (1938) – John Burr Williams

Si la ley de conservación del valor o “law of the conservation of investment value” no se cumpliera aparecerían “opportunities for profit by promoters and investment bankers”





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

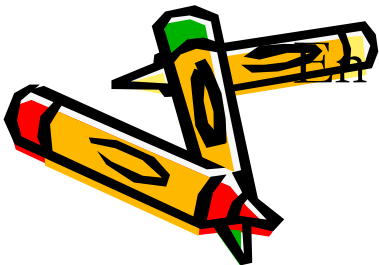
- ARGUMENTO DE ARBITRAJE EN M² – La ley del precio único



	Inversión	Rendimiento
Alternativa I		
comprar $\alpha\%$ de acciones de U: $\alpha S_U = \alpha V_U$		αX
Total Alternativa I	αV_U	αX
Alternativa II		
comprar $\alpha\%$ de Deuda de L:	αD_L	$\alpha r D_L$
comprar $\alpha\%$ de acciones de L	αS_L	$\alpha(X - r D_L)$
Total Alternativa II	αV_L	αX

En ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$V_U = V_L$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

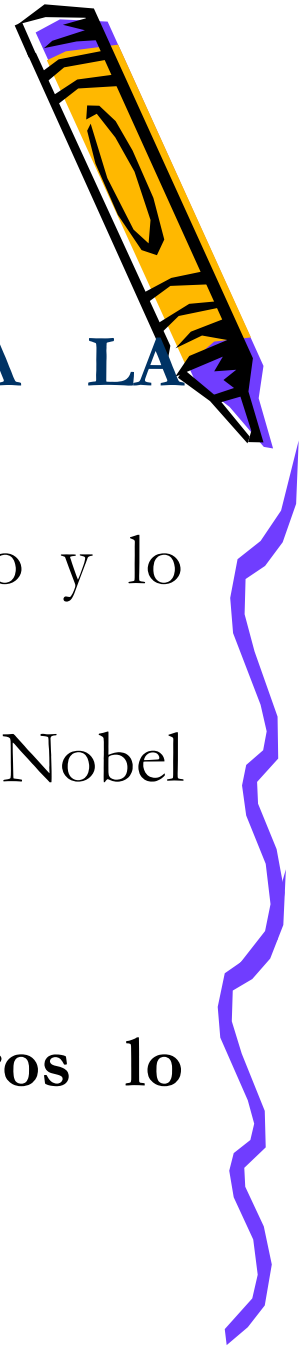
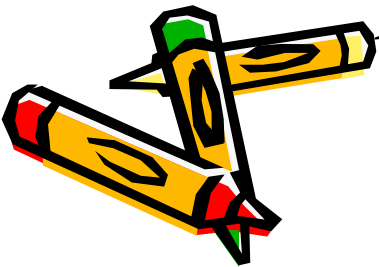
- EL ARGUMENTO DE MILLER A LA PRENSA

Miller: “Si Ud. saca dinero de un bolsillo y lo pone en el otro no es por ello más rico”

Prensa: Y Ud. está recibiendo el Premio Nobel por algo tan obvio?

Miller:

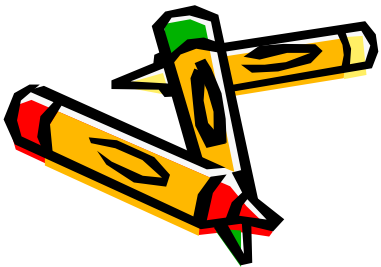
“Si, pero no se olvide que nosotros lo probamos rigurosamente”.





MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS

- EL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA – La Ley del Precio Único como un caso especial.





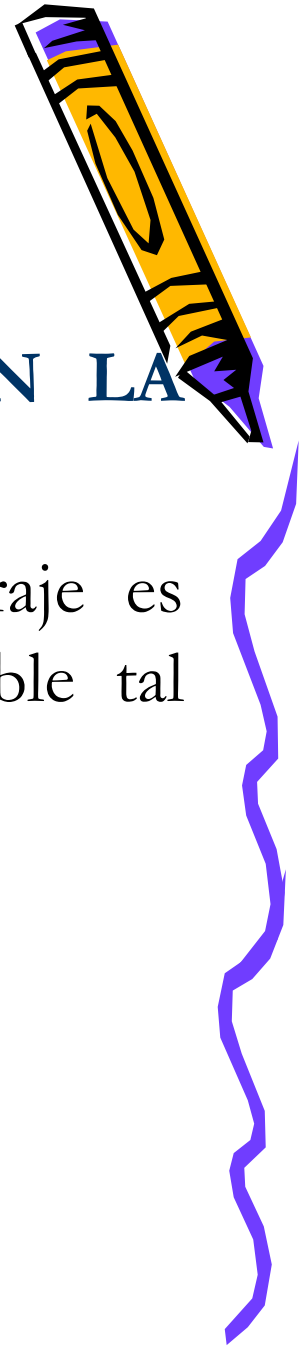
MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

• EL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA

– Formalmente una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión autofinanciable tal que:

- $V(0) \leq 0$
- $V(T) \geq 0$
- $P(V(T) > 0) > 0$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- EL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA

– Teorema Fundamental de las Finanzas (Dybvig y Ross) : Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- No Arbitrage (NA)
- Existencia de un operador de valuación lineal y positivo.
- Existencia de una demanda óptima (finita) para algún agente que prefiere más a menos.





MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS



- **EL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA**

- **Teorema de la Representación (Dybvig y Ross)**

- Existencia de un operador de valuación lineal y positivo.
- Existencia de una medida martingala equivalente o de probabilidad neutral al riesgo (Representación Probabilística del NA)
- Existencia de precios estados de la naturaleza estrictamente positivos o pricing kernel.





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- EL CONCEPTO DE ARBITRAJE EN LA TEORÍA FINANCIERA MODERNA

– Representación Probabilística del Argumento de NA

- **Primer Teorema Fundamental de las Finanzas:** No hay oportunidades de arbitraje (mercado viable) si, y sólo si, existe una medida de martingala equivalente (más comúnmente conocida como medida de probabilidad neutral al riesgo).
- **Segundo Teorema Fundamental de las Finanzas:** En presencia de mercados completos la medida de martingala equivalente es única.





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Existencia de un Operador Lineal Positivo

$$\begin{aligned} V^U &= L(X_s) = L(X_s - D + D) = L(A_s + D) = \\ &= L(A_s) + L(D) = V^L \end{aligned}$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

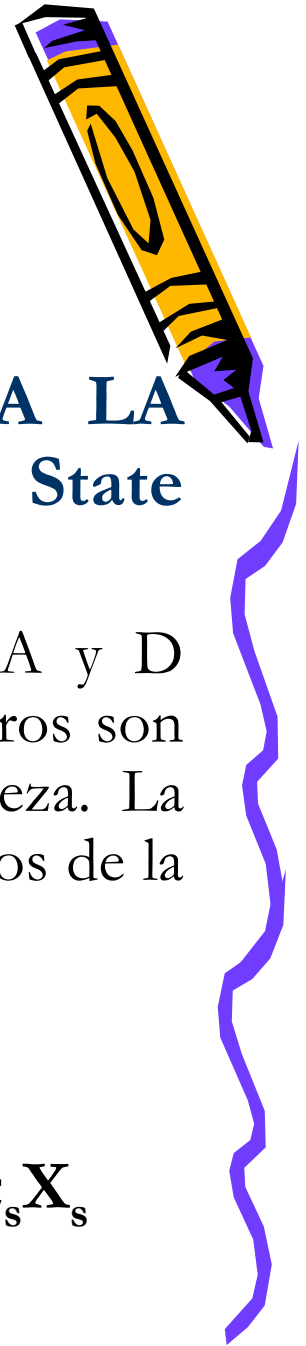
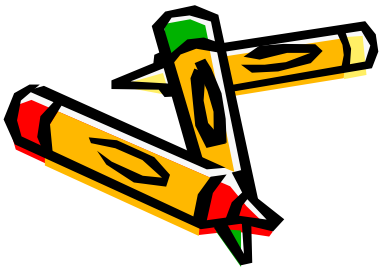
- **DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Arrow-Debreu State Prices Approach**

– Una firma se financia con dos instrumentos, A y D (Acciones y Deuda), cuyos pagos aleatorios futuros son A_s y D_s , en los distintos estados de la naturaleza. La suma de estos pagos agotan los ingresos operativos de la firma X_s en cada estado de la naturaleza.

$$X_s = A_s + D_s$$

– Sea π_s el precio del estado de la naturaleza s :

$$V = \sum_s \pi_s A_s + \sum_s \pi_s D_s = \sum_s \pi_s (A_s + D_s) = \sum_s \pi_s X_s$$





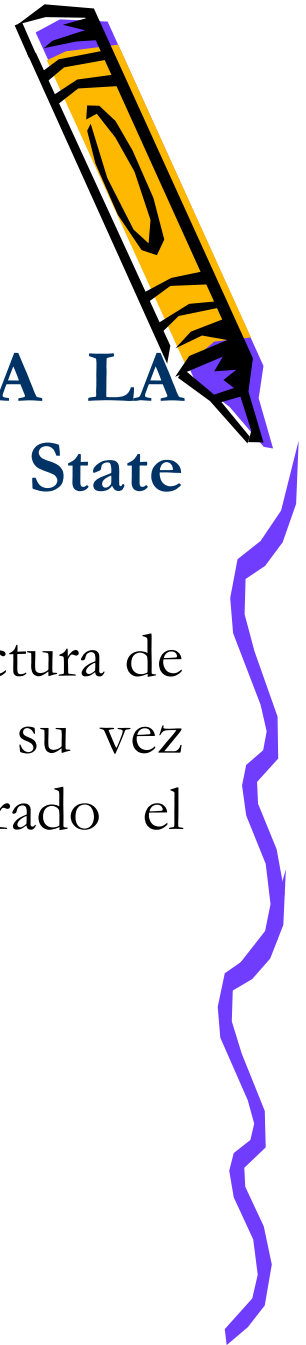
MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Arrow-Debreu State Prices Approach – Continuación:

– Supongamos ahora que la firma cambia su estructura de capital sin afectar ello su ingreso operativo. A su vez (como señala Stiglitz) tal cambio deja inalterado el conjunto de oportunidades de inversión:

$$\begin{aligned} V &= \sum_s \pi_s (A_s + \Delta_s) + \sum_s \pi_s (D_s - \Delta_s) = \\ &= \sum_s \pi_s (A_s + \Delta_s + D_s - \Delta_s) = \sum_s \pi_s (A_s + D_s) = \\ &= \sum_s \pi_s X_s \end{aligned}$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Risk Neutral Approach

– Basándonos en el ejemplo anterior

$$X_s = A_s + D_s$$

$$V = \sum_s \pi_s A_s + \sum_s \pi_s D_s$$

Dividiendo los precios de los estados de la naturaleza

por $\sum_s \pi_s$:

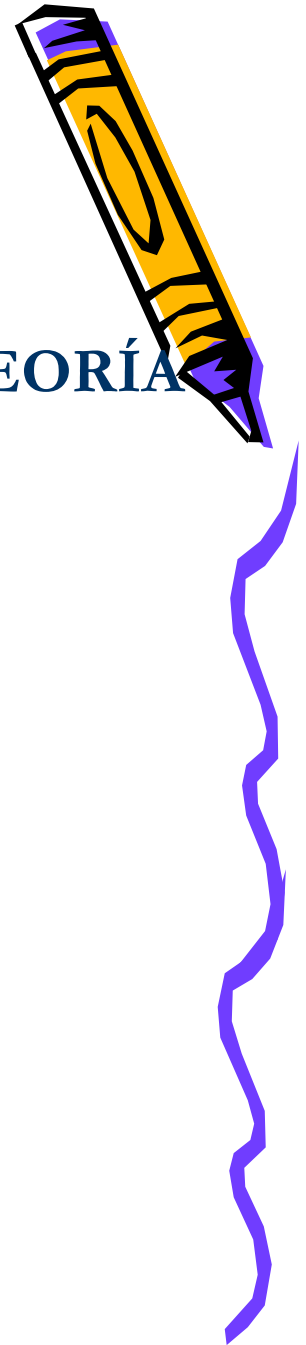
$$V / \sum_s \pi_s = \sum_s (\pi_s / \sum_s \pi_s) A_s + \sum_s (\pi_s / \sum_s \pi_s) D_s$$

Reconociendo que:

$$\checkmark \sum_s \pi_s = 1 / (1+r)$$

$$\checkmark 0 < (\pi_s / \sum_s \pi_s) < 1$$

$$\checkmark \sum_s (\pi_s / \sum_s \pi_s) = 1$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Risk Neutral Approach

– Continuación:

– Reordenando obtenemos:

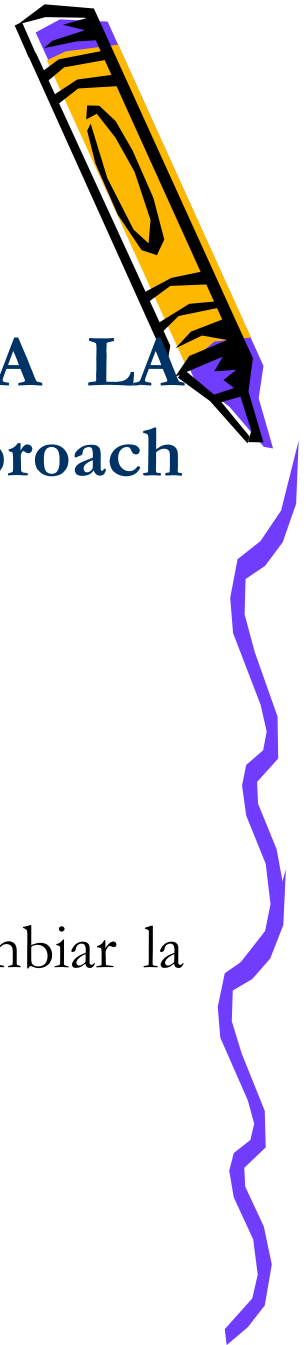
$$V = (1/(1+r))E^Q (A_s + D_s) \text{ con}$$

$$q_s = \pi_s / \sum_s \pi_s$$

– Similar razonamiento nos conduce a que al cambiar la estructura de capital

$$V = (1/(1+r))E^Q ((A_s + \Delta_s) + (D_s - \Delta_s)) =$$

$$= (1/(1+r))E^Q (A_s + D_s)$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- DERIVACIÓN DE M^2 APELANDO A LA TEORÍA MODERNA: Pricing Kernel o Factor de Descuento Estocástico Approach

– Consideremos una firma cuyo cashflow en $t+1$ es una variable aleatoria X_{t+1} . Supongamos que la firma financia sus operaciones sólo con equity.

El valor de la firma en t estará dado por (**Efficient Market Hypothesis**):

$$V_t = E_t[(\beta * U'(c_{t+1}) / U'(c_t)) * X_{t+1}] = E_t[m_{t+1} * X_{t+1}]$$

– Consideremos que la firma emite ahora Deuda cuyo payoff en $t+1$ será α :

$$V_t = \frac{E_t[(\beta * U'(c_{t+1}) / U'(c_t)) * (\alpha + (X_{t+1} - \alpha))]}{E_t[m_{t+1} * X_{t+1}]}$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- MM EN PRESENCIA DE DEFAULT RISK:
MERTON APPROACH

$$V^U = e^{-rT} E^Q[X_s]$$

$$V^L = e^{-rT} E^Q[(X_s - D)1_{(X_s > D)} + 0 \cdot 1_{(X_s \leq D)} +$$

$$+ D \cdot 1_{(X_s > D)} + X_s \cdot 1_{(X_s \leq D)}] = e^{-rT} E^Q[(X_s - D + D)1_{(X_s > D)} + X_s \cdot 1_{(X_s \leq D)}] = e^{-rT} E^Q[X_s]$$





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- MM EN PRESENCIA DE DEFAULT RISK:
PARIDAD PUT-CALL

S = Valor de la firma

X = Valor facial de la deuda

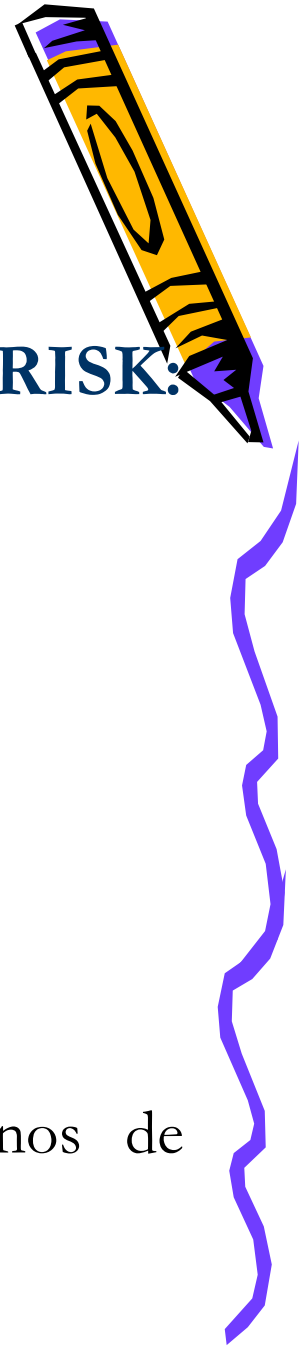
Payoff de la Deuda = $\text{Min}(S, X) = X - (X - S)^+$

Payoff de la Acción = $(S - X)^+$

El valor de una firma puede representarse como:

$$S = c + (X/R) - p$$

interpretando al equity y a la deuda en términos de opciones.





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- MM Y LA PARIDAD PUT-CALL

Para probar M^2 sólo debemos demostrar que S es invariante ante cambios en X , esto es que para dos valores diferentes de X ($X_1 \neq X_2$) el valor de la firma debe ser el mismo.

Puede demostrarse fácilmente que si:

$$c_1 + (X_1/R) - p_1 < c_2 + (X_2/R) - p_2$$

$$c_1 + (X_1/R) - p_1 > c_2 + (X_2/R) - p_2$$

existirían oportunidades de arbitraje y que en ausencia de este tipo de oportunidades:

$$S = c_1 + (X_1/R) - p_1 = c_2 + (X_2/R) - p_2 = S$$





MODIGLIANI-MILLER 50 AÑOS DESPUÉS



- **CONCLUSIONES: RELEVANCIA DE M^2**

- La teoría de **Asset Pricing** que caracteriza a las **Finanzas Modernas** encuentra al menos parte de su **ORIGEN** en el trabajo de M^2 .
- En lo relacionado con **Finanzas Corporativas** y la **Estructura de Capital** M^2 han determinado la **AGENDA** de las investigaciones futuras.
- Se ha afirmado que el período 1950-1980 representa la **Edad de Oro de la Teoría Financiera**. **Modigliani y Miller** han integrado indiscutiblemente el elenco principal de la obra.





MODIGLIANI-MILLER

50 AÑOS DESPUÉS

- **Bibliografía:**

- 1.-Constantinides, G. “Theory of Valuation: Overview and Recent Developments”
- 2.-Dybvig y Ross (1996) “Arbitrage” – The New Palgrave: A Dictionary of Economics.
- 3.-Harrison y Kreps (1979) “Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets” – Journal of Economic Theory.
- 4.-Harrison y Pliska (1981) “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading” - Stochastic Processes and Their Applications.
- 5.-Miller, M. (1988) “The Modigliani-Miller Propositions after Thirty Years” – Journal of Economic Perspectives.
- 6.-Modigliani y Miller (1958) “The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment” American Economic Review.
- 7.- Rubinstein, Mark (2002) “Great Moments in Financial Economics”(2002)
- 8.- Rubinstein, Mark (2006) “Theory of Investments” – Wiley
- 9.-Stulz, R. (2006) “Merton Miller”

