Microeconomía 1: Ejercicios Adicionales

Tomás Williams

22 de abril de 2009

UCEMA

4. En este caso tenemos una función de utilidad del tipo $U(x_1, x_2) = min[x_2 + 2x_1; x_1 + 2x_2]$. Es decir que la función U va a adoptar el mínimo número entre el lado izquierdo del corchete y el lado derecho del corchete.

    a. Para trazar esta curva de indiferencia debemos seguir 2 pasos. Primero debemos averiguar que pasa en donde los números de los corchetes son iguales (básicamente que pasa cuando igualamos el lado izquierdo con el lado derecho). Y por otra parte, debemos ver que pasa fuera de ese punto exacto para la curva de indiferencia $U = 20$. Por lo tanto, primero igualamos el lado izquierdo con el lado derecho y tenemos que,

    $$x_2 + 2x_1 = x_1 + 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

    Sabemos entonces que el punto de quiebre (u óptimo de esta función) se va a dar siempre cuando $x_1 = x_2$. Por el otro lado, sabemos que para graficar la curva de utilidad $U = 20$ debemos fijar la función de utilidad en ese número y ver que pasa en esa curva de indiferencia. Tenemos que $20 = min[x_2 + 2x_1; x_1 + 2x_2]$. Pero para que eso suceda, debe que el lado izquierdo es igual a 20 o que el lado izquierdo sea igual a 20.

    $$x_2 + 2x_1 \wedge x_1 + 2x_2$$

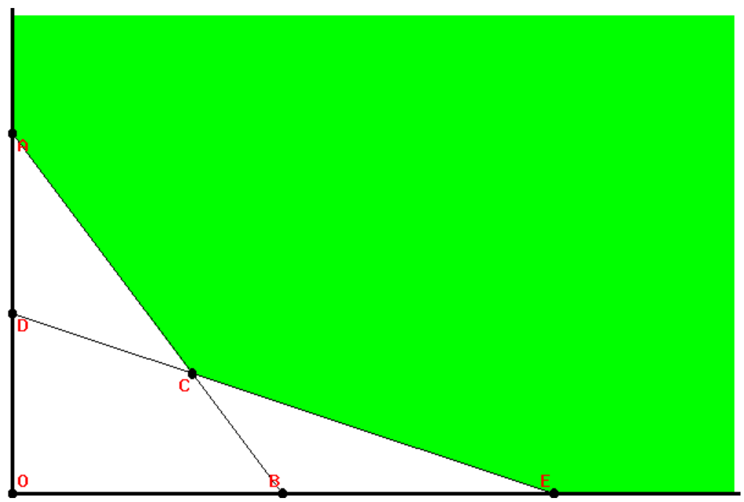
    Qué pasa si el lado izquierdo es igual a 20? Entonces esa es la única parte que hay que tomar en cuenta para graficar. Entonces tenemos una recta que va a ser $x_2 + 2x_1 = 20$ y que si despejamos x_2 vamos a tener que $x_2 = 20 - 2x_1$. Siguiendo el mismo pensamiento si el lado derecho es igual a 20 y el lado izquierdo mayor a 20 vamos a utilizar únicamente el lado derecho llegando a la recta $x_2 = \frac{20-x_1}{2}$. Entonces tenemos una curva de indiferencia partida en dos tramos y sabemos que el punto de quiebre se da cuando $x_1 = x_2$. Por lo tanto, ya podemos sacar exactamente el punto en que se cruzan estas rectas para la curva $U = 20$. Las igualamos las rectas que habíamos sacado antes y tenemos que

    $$20 - 2x_1 = \frac{20 - x_1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{20}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{20}{3}$$

    El último paso se da porque en el quiebre sabemos que $x_1 = x_2$. Ahora tenemos dos rectas que se cruzan en el plano pero debemos tener una función de utilidad. Es decir, debemos elegir qué recta elegir a la izquierda del punto de quiebre y cuál a la derecha. Si analizamos ambas rectas a la izquierda del punto de quiebre vamos a ver que hay una sola de ellas que nos reporta el nivel de utilidad 20 (esto se puede confirmar tomando un punto cualquiera de ambas rectas y viendo que utilidad nos da). Del lado derecho del punto de quiebre sucede lo mismo, hay una sóla recta que nos da el nivel de utilidad U=20. En conclusión, el gráfico de la curva de indiferencia puede ser formalizado en la siguiente función.

$$U = 20 = \begin{cases} x_2 = 20 - 2x_1 & \text{si } x_1 < \frac{20}{3} \\ x_2 = \frac{20}{3} & \text{si } x_1 = \frac{20}{3} \\ x_2 = \frac{20-x_1}{2} & \text{si } x_1 > \frac{20}{3} \end{cases}$$

Directamente de ahí ya sabemos que el gráfico es de la siguiente manera que va del punto A, al C y al E,



con el área sombreada indicando que cuando aumentamos la utilidad la curva se desplaza hacia afuera.

b. La idea es que si la pendiente de precios es mayor a la pendiente de la recta del lado izquierdo del quiebre, entonces siempre va a haber una solución de esquina tal que $x_1^* = 0$.

$$x_1^* = 0 \iff \frac{p_1}{p_2} > 2$$

c. Nuevamente la idea (y se puede ver gráficamente) es que cuando el cociente de precios sea menor a la pendiente de la recta del lado derecho del punto de quiebre siempre vamos a preferir pararnos en una solución de esquina sobre la recta del eje de x_1. Y como los precios son siempre positivos tenemos que formalmente,

$$x_2^* = 0 \iff 0 < \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}$$

d. Como se pudo ver en los ejercicios anteriores hay valores de los cocientes de precios (los que están estrictamente entremedio de las dos pendientes[1]) que no nos generan una solución de esquina sino una interior. Y justamente ese punto interior para cualquier valor entre estas dos pendientes es siempre el punto en donde $x_1 = x_2$ que era nuestro punto de quiebre original. Por lo tanto,

$$x_1^* = x_2^* \neq 0 \iff \frac{1}{2} < \frac{p_1}{p_2} < 2$$

5. En este ejercicio debemos mostrar porque elevar a un número a una potencia par no es una transformación monótona. Como una transformación monótona significa que me mantiene el orden que generaba mi función. Con un ejemplo simple podemos mostrar esto. Si yo tengo una función de utilidad del estilo $U(x) = x$ y decimos que $x = [-1, 0]$ son las cestas que tenemos que ordenar podemos ver que $U(-1) = -1 < U(0) = 0$. Sin embargo podemos generar una nueva función de utilidad elevando la anterior a una potencia par de la siguiente manera.

$$V(x) = [U(x)]^{2k} = x^{2k}$$

donde k puede ser cualquier número natural. Ahora volvamos a ordenar las cestas $x = [-1, 1]$ en nuestra nueva función de utilidad.

$$V(-1) = (-1)^{2k} = 1 > V(0) = (0)^{2k} = 0$$

En este nuevo caso la cesta $x = -1$ es preferida a $x = 0$ cuando en nuestra función de utilidad anterior era al revés. Es decir cualquier transformación que implique elevar una función a una potencia par no va a ser monótona porque nos va a cambiar la manera en que ordenamos las cestas.

6. Para demostrar esto lo hacemos por el absurdo. Supongamos que yo tengo una recta que pasa por el origen. Esto nos quiere decir que a medida que nos movemos hacia la derecha vamos a tener más de ambos bienes. Más rigurosamente,

$$x_2 = ax_1 \qquad a > 0 \Rightarrow \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = a > 0$$

La primer parte es la recta que generamos que pasa por el origen (es una recta con pendiente positiva a). Y la segunda parte (la derivada parcial mayor a 0) nos está informando que si yo me muevo hacia la derecha por

[1]Los valores del cociente de precios que se igualan a las pendientes de las rectas, es decir, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} \wedge \frac{p_1}{p_2} = 2$ generan infinitos óptimos y no un único óptimo y es por eso que no los tomamos en cuenta en este ejercicio

esa recta voy a estar aumentando la cantidad de ambos bienes x_1, x_2. Lo que nos dice es que si muevo x_1 un poco, x_2 se está moviendo en la misma dirección. Es decir, aumentando x_1 aumento necesariamente x_2 para todos los puntos de la recta.

Ahora supongamos que esta recta que pasa por el origen corta a una curva de indiferencia dos veces. Eso quiere decir que yo puedo generar dos cestas entre las que esté indiferente y al mismo tiempo estén sobre la recta que pasa por el origen. Formalmente,

$$(x_1, x_2)^0 \sim (x_1, x_2)^1 \tag{1}$$

donde los supraíndices indican que son dos cestas diferentes. Lo que decimos ahí es que estoy indiferente entre ambas cestas. Pero además, como están sobre la recta que pasa sobre el origen yo se que una de esas dos cestas tiene estrictamente más de los dos bienes que la otra. Pero si una cesta (supongamos la cesta con el supraíndice 1) tiene más de los dos bienes y tenemos preferencias monótonas. Y como monótonas quiere decir que más es preferido a menos, la cesta 1 debe ser preferida estrictamente a la cesta 0. Es decir, $(x_1, x_2)^0 \succ (x_1, x_2)^1$, que es una contradicción con lo que habíamos puesto en la ecuación (1). Por lo tanto, no se puede generar una recta que pasa por el origen que corte a una curva de indiferencia más de una vez si las preferencias son monótonas.

1. Trabajo Práctico 5: Otra manera de ver el ejercicio 4

A continuación voy a resolver el ejercicio 4 del práctico 5 que generó muchas dudas en clase de otra manera para el que tiene algo de curiosidad. Vamos a tratar de explicarlo a través de un nuevo concepto que es el de utilidad indirecta. Primero vamos a definir utilidad indirecta como la función que da la máxima utilidad del consumidor cuando enfrenta unos ciertos precios e ingreso. Representa las preferencias del consumidor sobre las condiciones de mercado. Lo que estamos diciendo acá es que nosotros vamos a tener una función de utilidad $U(x_1, x_2)$ cualquiera. Y si adentro de esa función le metemos las demandas obtenidas del problema de maximización de la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria que enfrenta el consumidor, vamos a obtener una función de utilidad indirecta (llamada $V()$ que va a depender únicamente de precios e ingreso. Esta nos va a indicar como se mueve el bienestar del consumidor cuando se modifican las condiciones de mercado (precios e ingreso) que es justamente lo que nos pide el ejercicio. Formalmente tenemos que si x_1^* y x_2^* son las demandas del consumidor de ambos bienes entonces,

$$U(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, M)$$

La idea es que metimos las demandas obtenidas en el problema del consumidor (que dependen únicamente de precios e ingreso) adentro de la utilidad y generamos una nueva función que únicamente depende de precios e ingreso y que nos muestra el bienestar del consumidor en diferentes situaciones de mercado.

Vamos a ver como funciona esto en un ejemplo. Si el problema del consumidor es,

$$\max U(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \quad s.a. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

vemos que el consumidor tiene una función de utilidad Cobb-Douglas con exponentes $\frac{1}{2}$ sobre ambos bienes y que enfrenta una restricción presupuestaria normal de dos bienes. Como vimos en clase, las demandas que salen de este problema de maximización son las siguientes,

$$x_1^* = \frac{M}{2p_1}$$

$$x_2^* = \frac{M}{2p_2}$$

Ahora como dijimos anteriormente, para generar la función de utilidad indirecta debemos meter estas demandas dentro de nuestra función de utilidad original. Entonces tenemos que,

$$V(p_1, p_2, M) = U(x_1^*, x_2^*) = (x_1^* x_2^*)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pasándolo en limpio, generamos

$$V(p_1, p_2, M) = \left(\frac{M}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

que es nuestra función de utilidad indirecta que depende únicamente de los precios de los bienes y del ingreso.

Nuestro objetivo ahora es aplicar este concepto teórico a la naturaleza del ejercicio. Para eso vamos a hacer un supuesto que es que si el consumidor gastaba inicialmente $\frac{1}{2}$ en alimentos, también gastaba la misma proporción en los otros bienes y que estas proporciones se mantienen siempre constantes llevándonos a pensar que el consumidor tiene como función de utilidad la Cobb-Douglas que usamos anteriormente de exponentes $\frac{1}{2}$ para ambos bienes. Eso nos facilita las cosas porque ya derivamos nuestra función de utilidad indirecta. Lo que nos dice el ejercicio es que el precio de los alimentos subió un $10\,\%$ y el ingreso subió un $5\,\%$. Entonces tenemos dos diferentes condiciones de mercado que las evaluar en la función de utilidad indirecta para ver bajo cual el consumidor tiene un bienestar mayor o si éste no se modifica. Para ello definimos,

$$M_1 = (1,05)M_0 \tag{2}$$

$$\hat{p_1} = (1,1)p_1 \tag{3}$$

Lo único que estamos diciendo ahí es que hay dos condiciones de mercado (o dos diferentes restricciones de presupuesto). La primera con (p_1, p_2, M_0) y la segunda con $(\hat{p_1}, p_2, M_1)$ en donde estas últimas condiciones tienen los aumentos de (1,05) y (1,1) de el ingreso y el precio de los alimentos respectivamente. Análogamente vamos a generar una función de utilidad indirecta V_0 que nos indique el bienestar bajo las primeras condiciones de mercado y una segunda V_1 que nos muestre el bienestar cuando cambiaron el precio de los alimentos y el ingreso del consumidor. Entonces,

$$V_0(p_1, p_2, M) = \left(\frac{M_0}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_0}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_1(p_1, p_2, M) = \left(\frac{M_1}{2\hat{p_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_1}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora esta última V_1 podemos reemplazar M_1 y $\hat{p_1}$ por nuestras ecuaciones (2) y (3). Así tenemos que,

$$V_1(p_1, p_2, M) = \left(\frac{(1,05)M_0}{2(1,1)p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1,05)M_0}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De acá podemos sacar los (1,05) y el (1,1) de los paréntesis de la siguiente manera,

$$V_1(p_1,p_2,M) = \underbrace{\frac{1,05}{(1,1)^{\frac{1}{2}}}}_{>1} \underbrace{\left(\frac{M_0}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_0}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{V_0}$$

Por lo tanto tenemos que $V_1(p_1,p_2,M) = aV_0(p_1,p_2,M)$ donde a es un número mayor a 1. Pero esto nos está indicando exactamente que el bienestar del consumidor es mayor estrictamente bajo las nuevas condiciones de mercado, es decir, está mejor cuando le suben el precio de los alimentos un 10 % y el ingreso 5 % . A pesar de que hicimos un supuesto sobre la función de utilidad del consumidor (que tiene una Cobb-Douglas) que igualmente cumple la condición de que inicialmente gastaba la mitad en uno de los bienes, logramos llegar a mostrar que el consumidor está mejor bajo esta nueva situación de mercado a través de un concepto nuevo como es la función de utilidad indirecta.