Macroeconomia 1
Class 8a
Crecimiento endogeno
UCEMA

Prof. McCandless

September 8, 2009

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Queremos usar un modelo tipo Solow que puede tener crecimiento endogeno
- Modelo basico de Solow:crecimento es exogeno
  - viene de crecimiento en tecnologia, poblacion, tasa de ahorro, o reduccion en depreciacion
- Cambios en esta variables cambian los estados estacionarios
- Modelos vamos a estudiar cambian la funcion de produccion
  - hay varios metodos para producir crecimiento endogeno
  - usamos externalidades en produccion en las empresas individuales
- Los modelos con crecimiento endogeno terminan en form AK
  - alguna constante por capital (o capital por trabajador) con exponencial = 1

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Usamos el modelo simple de Solow pero con externalidades en produccion

$$
\begin{aligned}
Y_t^j &= F\left(K_t^j, L_t^j, K_t\right) = A\left(K_t^j\right)^{\theta}\left(L_t^j\right)^{1-\theta}(k_t)^{\phi} \\
K_{t+1} &= (1-\delta) K_t + I_t \\
S_t &= sY_t \\
I_t &= S_t
\end{aligned}
$$

- Cada empresa tiene economias de escala (entre K_t^j y L_t^j)
- Ratio de capital total a trabajo total, k_t, tiene effecto como externalidad
- Mas alto capital por trabajador en la economia, mas productive es cada empresa

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Podemos escribir esto en terminos de por trabajador como

$$\begin{aligned} y_t^j &= A\left(k_t^j\right)^{\theta}(k_t)^{\phi} \\ (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + i_t \\ s_t &= sy_t \\ i_t &= s_t \end{aligned}$$

- sumamos sobre las empresas para tener

$$\begin{aligned} y_t^j &= A\left(k_t^j\right)^{\theta}(k_t)^{\phi} \\ &= A\,(k_t)^{\theta}(k_t)^{\phi} \\ &= A\,(k_t)^{\theta+\phi} \end{aligned}$$

- con las mismas rentas y salarios, todos las empresas tienen las mismo ratio de capital a trabajador

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Construemos la modelo en la misma forma como antes

$$\begin{aligned} (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + i_t \\ (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + s_t \\ (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + sy_t \\ (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + sA\,(k_t)^{\theta+\phi} \end{aligned}$$

- definimos la tasa neta de crecimiento de capital:

$$\gamma_t^k = \frac{k_{t+1}}{k_t} - 1$$

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- escribimos la ecuacion arriba como

$$\begin{aligned} (1+n)\,\gamma_t^k &= (1+n)\left(\frac{k_{t+1}}{k_t} - 1\right) \\ &= (1+n)\,\frac{k_{t+1}}{k_t} - (1+n) \end{aligned}$$

- usado
$$(1+n)\,k_{t+1} = (1-\delta)\,k_t + sA\,(k_t)^{\theta+\phi}$$

- tenemos que
$$\begin{aligned}(1+n)\,\gamma_t^k &= (1-\delta)\,\frac{k_t}{k_t} + sA\frac{(k_t)^{\theta+\phi}}{k_t} - (1+n) \\ &= -(n+\delta) + sA\,(k_t)^{\theta+\phi-1}\end{aligned}$$

- entonces
$$\gamma_t^k = \frac{-(n+\delta)}{(1+n)} + \frac{sA}{(1+n)}\,(k_t)^{\theta+\phi-1}$$

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Tipo de crecimiento depende en el valor de $\theta+\phi-1$

  1. si $\theta+\phi<1$, hay estado estacionario, $\gamma_t^k=0$, cuando
  $$k_t = \left[\frac{n+\delta}{sA}\right]^{\frac{1}{\theta+\phi-1}}$$
  y modelo es similar a Solow estandard en su equilibrios
  2. si $\theta+\phi>1$, $\gamma_t^k \uparrow$ sin limite: la economia es explosiva
  3. si $\theta+\phi=1$,
  $$\gamma_t^k = \gamma^k = \frac{sA-(n+\delta)}{(1+n)}$$
     (a) si $sA>(n+\delta)$, la economia tiene una tasa de crecimiento constante positiva
     (b) si $sA<(n+\delta)$, la economia tiene una tasa de crecimiento constante negativa
     (c) si $sA=(n+\delta)$, la economia no crece nunca: $\gamma_t^k=0$
     (d) Nota que no hay crecimiento de tecnologia

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- Buscamos camino con tasa de crecimiento constante

- Ecuacion de primera diferenca es
$$(1+n)\,k_{t+1} = (1-\delta)\,k_t + sAk_t$$

- Nota como la funcion de produccion aggregada is Ak_t

- bucamos constante tasa de crecimiento
$$\gamma^k = \frac{k_{t+1}}{k_t} - 1$$

- Divida ecuacion de primera diferencia por k_t y tenemos

$$(1+n)\frac{k_{t+1}}{k_t} = (1-\delta) + sA$$

- restar $(1+n)$ de ambos lados

$$(1+n)\left[\frac{k_{t+1}}{k_t} - 1\right] = (1-\delta) + sA - (1+n)$$

- o

$$(1+n)\,\gamma^k = sA - (\delta + n)$$

.Crecimiento endogeno (modelo AK)

- o

$$(1+n)\,\gamma^k = sA - (\delta + n)$$

- terminamos con la tasa de crecimiento

$$\gamma^k = \frac{sA - (\delta + n)}{(1+n)}$$

- Resultados:
  - paises con tasa de crecimiento de poblacion, n, mas grande crece mas lento
  - paises con tasa de ahorro, s, mas alto crece mas rapido
  - paises pobres (con Ak_t bajo) puede crecer con la misma tasa como una pais con Ak_t alta

.Renta de capital, y salario de trabajo

- Funcion de produccion de una empresa es

$$Y_t^j = A\left(K_t^j\right)^{\theta}\left(L_t^j\right)^{1-\theta}(k_t)^{\phi}$$

- En mercado competitiva perfecta, salario = producto marginal de trabajo y renta 0 producto marginal de capital

- entonces

$$\begin{aligned} w_t &= (1-\theta)\,A\left(K_t^j\right)^{\theta}\left(L_t^j\right)^{-\theta}(k_t)^{\phi} \\ &= (1-\theta)\,A\,(k_t)^{\theta+\phi} \\ &= (1-\theta)\,Ak_t \end{aligned}$$

- los salarios suben con k_t

Renta de capital, y salario de trabajo

- la renta es

$$\begin{aligned} r_t &= \theta A \left(K_t^j\right)^{\theta-1} \left(L_t^j\right)^{1-\theta} (k_t)^{\phi} \\ &= \theta A \left(k_t^j\right)^{\theta-1} (k_t)^{\phi} \\ &= \theta A \left(k_t^j\right)^{\theta+\phi-1} \\ &= \theta A \end{aligned}$$

- renta es constante en el largo de tiempo