Historia del pensamiento económico **Jorge M. Streb**

Clase 14 **7 de noviembre de 2014**

Temas

1. Curvas de respuestas óptimas en el duopolio de Cournot
2. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern
3. La paradoja de San Petesburgo
4. El principio de utilidad esperada

Desarrollo

1. Curvas de respuestas óptimas en el duopolio de Cournot

Ahora vamos a ver un caso particular de las ecuaciones de Cournot que están detrás del experimento de Holt, usando curvas de demanda lineales en el precio.

A. Demanda de mercado

Suponemos que el precio de mercado

$$p = f(D)$$

toma la forma simple

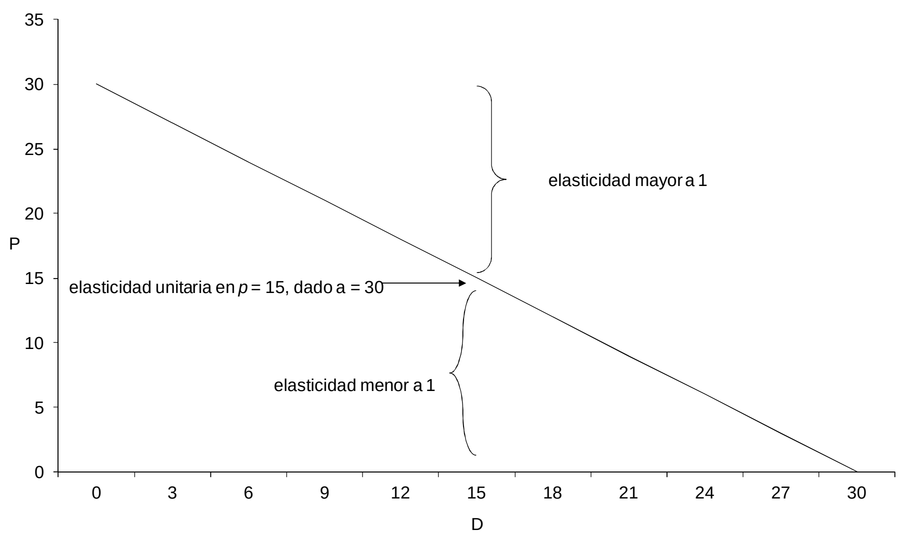
$$p = a - D = a - \left(D_1 + D_2\right).$$

Es decir, el precio igual una constante menos la suma de producción de las dos firmas (en el caso general, van a ser *n* firmas: $D = \sum_{j=1}^{n} D_j = D_i + \sum_{j \neq i} D_j$). Esta formulación lineal implica que la elasticidad precio de la demanda de mercado varía a lo largo de la curva:

$$\eta_{p,D} \equiv -\frac{dD}{dp}\frac{p}{D} = 1\frac{p}{a-p},$$

por lo que la elasticidad es uno cuando $p = a - p$, es decir cuando $p = a/2$. Para $p < a/2$, la elasticidad es menor a 1, mientras que para $p > a/2$ la elasticidad es mayor a 1. Esto se representa en el gráfico abajo donde la cantidad está en las abscisas y el precio en las ordenadas, con $a = 30$.

Gráfico 1. Curva de demanda de mercado



Cournot tiene un enfoque más general en su capítulo 4, ya que sólo supone que hay una relación inversa (negativa) entre precio y cantidad. Como vimos, aunque Cournot usó el concepto de elasticidad, no le puso nombre: dice que una empresa monopólica siempre va a querer subir el precio si está en lo que corresponde de hecho al tramo inelástico de la curva de demanda. Según argumenta en el capítulo 5 sobre monopolio, si los costos de producción marginales son nulos, elige como óptimo lo que corresponde para nosotros al punto de elasticidad unitaria, ya que es el que maximiza el ingreso (que iguala los beneficios en este contexto de costos de producción nulos).

B. Caso del duopolio

Cantidad como variable de decisión

Para el caso de monopolio, la variable de decisión que considera Cournot es el precio (aunque en un contexto determinista da lo mismo decidir precio que cantidad). En cambio, una vez que considera más de una empresa, pasa a tomar como variable de decisión a la cantidad de producción. Bertrand lo va a criticar duramente por eso (el resultado de Bertrand, si se decide precios, es que con dos o más empresas el precio va a terminar en el nivel competitivo).

Uno puede reconocer que la variable de decisión de las empresas es típicamente el precio, excepto en el caso límite de un sistema perfectamente competitivo donde cada oferente es precio-aceptante, ya que el precio lo determina el mercado y puede ofrecer todo lo que quiere a ese precio (la curva de demanda que enfrenta cada empresa es horizontal). Sin embargo, justamente la interpretación que Ivan Png, en su libro *Managerial economics*, da del modelo de Cournot es que lo que es difícil de ajustar en el corto plazo es el nivel de producción; en cambio, en Cournot el oferente implícitamente puede adecuar inmediatamente sus precios a los precios de la competencia para no quedar fuera del mercado, dado que es un bien perfectamente homogéneo desde el punto de vista de los demandantes (tiene que haber cierta diferenciación de productos para que aparezca poder de mercado).

En cambio, el modelo de Bertrand supone que una vez que puso el precio, la empresa no lo puede ajustar frente al precio de la competencia, así que queda fuera del mercado el que tiene un costo más alto. Por eso, Png considera que el modelo de Bertrand sirve para modelar una licitación a sobre cerrado, donde el postor que ofrece el menor precio se queda con todo, en cambio la cantidad generalmente no es una limitación para los oferentes.

Funciones de beneficio o ingresos netos

Dada la función de beneficios de cada empresa i, para i=1,2,

$$\pi_i = D_i f(D) - D_i c \ ,$$

donde se supone que hay un costo marginal constante de *c* para producir (en lugar de 0, como en el capítulo 7 de Cournot), y reemplazando *f*(*D*) por el precio de mercado, se tiene que

$$\pi_i = D_i f(D) - D_i c = D_i \left(a - \left(D_i + D_{-i} \right) - c \right).$$

Cuando cada empresa maximiza sus beneficios, Cournot reconoce que son una función de la producción de ambas firmas:

$$\pi_i = \pi_i(D_i, D_{-i}) .$$

La condición de primer orden, maximizando con respecto a su propio nivel de producción D_i y tomando como dada la producción D_{-i} de la otra firma, es para el caso particular de la demanda lineal:

$$D_i = \frac{a - D_{-i} - c}{2} \quad .$$

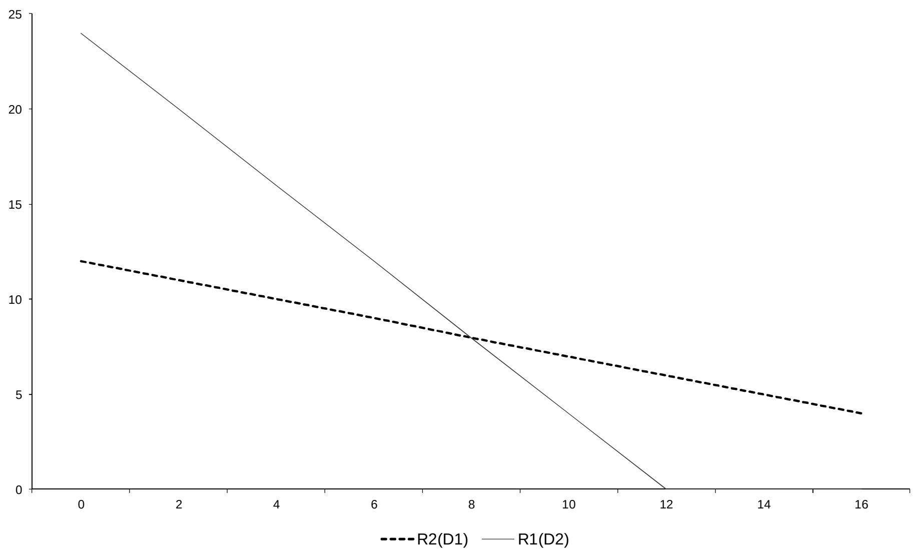
La condición de segundo orden se cumple, ya que la derivada segunda es –2<0. En la terminología moderna, son las funciones de respuesta óptima de cada empresa.

Cournot planteó una solución gráfica donde se intersectaban las curvas de ambas empresas, sus funciones de respuesta óptima:

$$D_1^* = R_1(D_2) = \frac{a-D_2-c}{2},$$
$$D_2^* = R_2(D_1) = \frac{a-D_1-c}{2}.$$

Resolviendo este sistema lineal simple, la solución de equilibrio es $D_1^* = D_2^* = \frac{a-c}{3}$. Esto se puede graficar al modo de Cournot en el gráfico que sigue, donde la intersección corresponde al equilibrio Nash, o equilibrio Cournot-Nash, ya que Cournot planteó y resolvió un ejemplo concreto primero. En el eje de las abscisas se presenta la cantidad D_1, mientras que el eje de las ordenadas se representa la cantidad D_2. Las funciones de respuesta óptima son lineales en la cantidad que produce el otro, por lo que gráficamente se representan por rectas. Se toman los siguientes parámetros: $a = 30$, $c = 6$, por lo que $D_1^* = D_2^* = 8$.

Gráfico 2. Respuestas óptimas de cada empresa



El equilibrio se puede interpretar como la intersección de las funciones de respuesta óptima, es decir, como respuestas óptimas mutuas, que es la manera de caracterizar cualquier equilibrio de Nash.

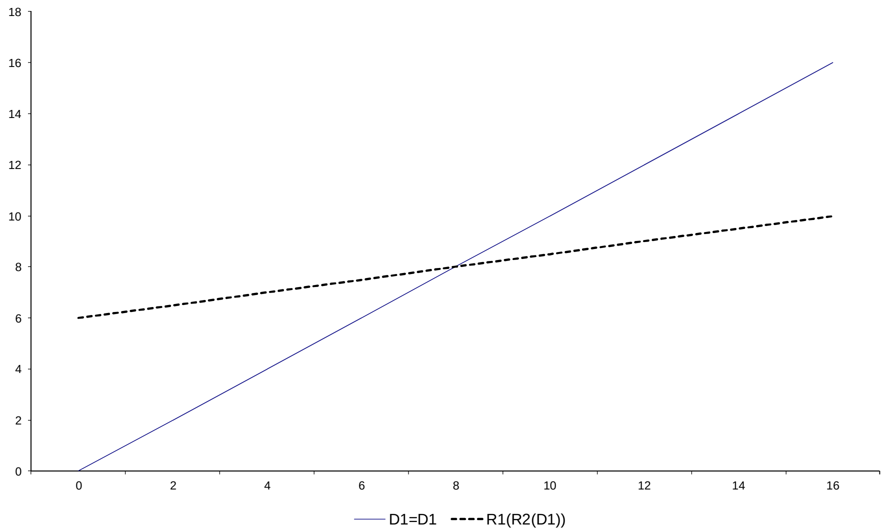
La perspectiva de Nash

Hay una manera de representar gráficamente el equilibrio de este modelo que lo lleva a ver como un punto fijo, que es la perspectiva que adoptó John Nash cuando discutió este problema. Veamos esto gráficamente, dado el hecho de que $D_1 = R_1(D_2)$ y $D_2 = R_2(D_1)$. Partiendo de un punto arbitrario D_1, se puede ver la respuesta óptima D_2^* del jugador 2 y la respuesta óptima D_1^* del jugador 1 a la respuesta óptima del jugador 2:

$$D_1^* = R_1(D_2^*) = R_1\big(R_2(D_1)\big) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{a - D_1 - c}{2} - c\right) = \frac{a-c}{4} + \frac{D_1}{4}.$$

Esto se puede graficar como sigue:

Gráfico 3. Respuesta óptima de empresa 1 a respuesta óptima de empresa 2



Cuando esta función de respuesta óptima de 1 a la respuesta óptima de 2 intersecta la recta de 45 grados, es un punto fijo: el punto de partida inicial de 1 coincide con la respuesta óptima de 1 a lo que hace 2. La respuesta es la misma que antes: Nash usó esta idea de punto fijo para demostrar la existencia de un equilibrio en un contexto diferente, un número finito de estrategias puras pero donde se admiten estrategias mixtas.

¿Cómo se llega al equilibrio?

Vimos que el equilibrio de Nash tiene dos partes, la parte (i) de racionalidad de los jugadores, que lleva a jugar la respuesta óptima a lo que hace el otro jugador, y la parte (ii) de expectativas consistentes, donde es de dominio público qué va a hacer cada jugador.

Cournot no solo planteó la cuestión de cuál es el equilibrio, sino que se preguntó acerca de cómo se podía llegar al equilibrio. La pregunta de Cournot se puede relacionar a la pregunta acerca de dónde salen las expectativas consistentes que corresponden a la intersección de las dos funciones de respuesta óptima del gráfico 2, donde ambas empresas están optimizando mutuamente y esperan que la otra lo haga también.

No es obvio cómo surgen las expectativas comunes del equilibrio Cournot-Nash sobre qué va a hacer cada jugador. Para eso Cournot propuso un proceso de pueba o error. Cournot describió que el proceso para llegar al equilibrio, y para que las expectativas se correspondan a estrategias de equilibrio, es un proceso de tanteo (*tâtonnement*). En esta idea de tanteo, los jugadores responden óptimamente a la estrategia pasada del otro jugador (no a la estrategia actual). Sin embargo, en este caso convergen al equilibrio de Nash.

Esta idea es desarrollada por la teoría de juegos evolutiva como la dinámica de mejor respuesta (*best-response dynamics*), donde cada jugador optimiza respecto a las acciones pasadas de los otros jugadores, dándole un carácter adaptativo al juego. La teoría de juegos evolutiva estudia la conducta de agentes limitadamente racionales, que no calculan lo que el otro jugador hace, sino que eligen la respuesta óptima a lo que hizo en el período anterior, para estudiar las estrategias evolutivamente estables. A veces sólo algunas de las estrategias de los equilibrios de Nash resultan ser evolutivamente estables. Esta dinámica parece representar cómo se juega en algunos contextos experimentales.

En otras palabras, Cournot anticipa con su ejemplo de duopolio las dos corrientes principales de teoría de juegos: la idea de equilibrio de Nash con jugadores absolutamente racionales y la dinámica de respuesta óptima fuera de equilibrio con jugadores limitadamente racionales.

C. Caso de *n* empresas (material opcional, se puede saltear)

Cournot también planteó el caso cuando n crece indefinidamente, lo que llamó concurrencia indefinida en su capítulo 8, o competencia perfecta en el uso actual. Si tenemos que la producción de mercado

$$D = \sum_{j=1}^{n} D_j = D_i + \sum_{j \neq i} D_j \ ,$$

y que por simetría todas las otras firmas producen lo mismo (ya que enfrentan la misma demanda y tienen costos marginales iguales), $D = D_i + (n-1)D_{-i}$, tenemos que

$$\pi_i = D_i f(D) - D_i c = D_i \left(a - \left(D_i + (n-1)D_{-i} \right) - c \right).$$

La condición de primer orden nos lleva a que:

$$D_i = \frac{a-(n-1)D_{-i}-c}{2} \quad .$$

Si tomamos en cuenta que en equilibrio $D_i = D_{-i}$, entonces

$$D_i = \frac{a-c}{n+1} \quad .$$

Como la producción total está dada por $D = nD_i$, el precio de mercado es

$$p = a - D = a - n\frac{a-c}{n+1}.$$

Con muchas empresas, para *n* aumentando sin límite, se tiene que

$$p = a - a + c = c.$$

Es decir, de Cournot se deriva el principio de que en competencia perfecta el precio iguala al costo marginal. De aquí sale la curva de oferta (algo que Cournot no graficó, a diferencia de la curva de demanda). Cournot modela la competencia perfecta como el límite de un juego con innumerables empresas.

2. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern

Von Neumann y Morgenstern han tenido una gran influencia en la economía moderna, pero más en términos de enfocar la economía como una cuestión estratégica que en su propuesta de una solución de equilibrio, ya que ahora lo que se usa es el concepto de equilibrio de Nash propuesto por Nash en 1950.

Pero hay un gran aporte específico de estos autores, la teoría de utilidad esperada que sirve para modelar las decisiones bajo incertidumbre. Esto está en la base del análisis de teoría de juegos, donde inherentemente hay incertidumbre endógena (¿qué va a hacer el otro jugador?). Además, es fundamental también en problemas de decisión donde hay incertidumbre exógena (por ejemplo, los agricultores y el clima).

En pasaje de su libro sobre *Teoría de juegos y comportamiento económico* de 1944, plantean la diferencia de su enfoque estratégico con el enfoque convencional, que denominan el "enfoque de mercado". El enfoque de mercado es que el consumidor maximiza utilidad, el empresario beneficios. Se dice que maximizar es actuar racionalmente, pero ellos hacen notar que esto depende del conocimiento y entendimiento de los cursos de acción que tiene abiertos el decisor.

El caso de Robinson Crusoe es un problema de máximo (condicionado) común cuyas variables controla el decisor [de esta manera describe por ejemplo Samuelson el problema económico en sus *Fundamentos del análisis económico* de 1947]. Sin embargo, el problema del participante en economía social es diferente al problema de Robinson Crusoe: es conseguir el máximo de algo que no se controla. Esto no se trata en la matemática clásica: si los intereses no son paralelos, no es problema simple de máximo, sino de juegos de estrategia. La interdependencia de acciones es reconocida en los problemas clásicos de duopolio y oligopolio, por el lado de la oferta [esto y lo que sigue remiten a Cournot, al que después volvemos]. Del lado de la demanda se suponen muchos demandantes, por lo que no hay comportamiento estratégico.

Cuando hay grandes números se toma la competencia como límite: pero hay que tener cuidado de que no se formen coaliciones de un pequeño número de jugadores. La escuela de Lausanne [es decir, la teoría de equilibrio general desarrollado por Walras] que supone que no se forman coaliciones tiene que ser verificada. [Nash después va a plantear la diferencia entre teoría de juegos no cooperativa, donde no hay coaliciones, y teoría de juegos cooperativa, donde sí hay.]

3. La paradoja de San Petesburgo

Adam Smith plantea el principio de interés propio como guía de las acciones individuales. Cournot presenta una formalización en el contexto de pagos monetarios, las empresas que maximizan sus beneficios. Este es el principio de racionalidad estrecho.

En el caso más general, la racionalidad individual se plantea en términos de maximización de la utilidad. Este es el principio de racionalidad amplio, que tiene la virtud de que es más flexible, pero la contra de que puede racionalizar muchas cosas (aunque no cualquier cosa) .

Si hay incertidumbre, hace falta generalizar la idea de maximización de utilidad. Vamos a verlo primero con un ejemplo concreto. Luego, vamos a dar los fundamentos de la maximización de la utilidad bajo incertidumbre que fue un aporte clave de von Neumann y Morgenstern. Históricamente, el tema de la decisión bajo incertidumbre aparece a principios del siglo XVIII con Daniel Bernoulli, que resuelve en 1738 la paradoja de San Petesburgo propuesta en 1713 por Nicolás Bernoulli, otro matemático y primo suyo proponiendo usar una función de utilidad.

La paradoja de San Petesburgo es un experimento mental que involucra una lotería que da un premio de:

- 2 rublos con probabilidad ½;
- 4 rublos con probabilidad de ¼;
- 8 rublos con probabilidad 1/8;
- y así sucesivamente.

O sea que hay premios de 2^n rublos con probabilidad $(1/2)^n$, para $n = 1,2,3,...,N$. Por tanto, la suma (el valor esperado) es N si hay N vueltas. Si N tiende a infinito, el valor esperado también. Sin embargo, nadie estaba dispuesto a pagar mucho por esta lotería.

Laplace planteó que, para N muy grande, no hay banca que pueda aceptar la apuesta en forma creíble, así que eso desde ya es un tema a nivel práctico (también está limitado lo que uno puede apostar por la restricción presupuestaria individual). Por eso, consideremos qué sucede para el caso de *N*=100, que promete un premio en promedio de 100 rublos (piensen en todo caso en pesos). Los comentarios sobre la disposición a pagar fueron 2, 3, y algún otro número menor o igual a 100. Es decir, casi nadie estaba dispuesto a pagar el valor esperado sino menos. Esta es la experiencia típica para este caso (parece que el valor modal es entre 2 y 3 rublos).

La clave de la solución que ofrece Bernoulli es que no se puede explicar el comportamiento respecto a esta lotería por su valor esperado. Lo que propone Bernoulli es que a los individuos no les interesa el premio x sino la utilidad del premio $U(x)$. Si la distribución de probabilidad es discreta, el valor esperado está dado por

$$\mathrm{E}[x] = \sum px_i \,,$$

y la utilidad esperada por

$$\mathrm{E}[U(x)] = \sum p_i U(x_i) \,.$$

Bernoulli propuso en particular una utilidad logarítmica, que es cóncava y lleva a una utilidad marginal decreciente del ingreso. Nosotros consideramos el logaritmo en base 10, donde $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$ y $\log_{10} 100 = 2$, por lo que queda claro que hay que ofrecer cada vez mayores montos para que aumente lo mismo la utilidad (y un mismo aumento de riqueza genera montos decrecientes de utilidad). El planteo de Bernoulli fue con logaritmos naturales:

$$U(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[\ln x] = \Sigma p_i \ln x_i \,.$$

Como demostró Bernoulli para el caso de la paradoja de San Petesburgo, el individuo no va a estar dispuesto apostar mucho en este caso incluso en el caso de que el premio esperado sea infinito (la respuesta que le da es un poco más de 2 rublos, lo que está cerca del valor modal del curso).

Sin embargo, la función de utilidad logarítmica no alcanza para explicar por qué no se acepta apostar mucho por otras loterías que tienen también un valor esperado infinito, por ejemplo, ganar 2 pesos con probabilidad ½ o ganar 2^n pesos con probabilidad ½. Para eso hace falta introducir una característica adicional, que la función de utilidad sea acotada. Por ejemplo, una curva que tiene un valor máximo es la curva logística, que al principio es convexa y luego de cierto punto se vuelve cóncava (esta curva es usada también para describir el crecimiento de una población con un límite de recursos dados).

4. Teoría de la utilidad esperada

Lo que mostraron von Neumann y Morgenstern es que la utilidad esperada introducida por Daniel Bernoulli se podía derivar de una serie de axiomas simples.

A. Los axiomas de von Neumann y Morgenstern

Vamos a seguir básicamente la discusión en el apéndice 3 del capítulo 2 de Davis y Holt (1993) sobre este tema, que plantean una derivación a partir de seis axiomas:

(i) *substitución*

(ii) *transitividad*

(iii) *monotonicidad* (Davis y Holt toman *monotonicidad* por el carácter monetario de los premios que estudian, es una aplicación del principio de *dominancia*)

(iv) *reducción de lotería compuestas* (Davis y Holt usan lo que es un caso particular de la *invariancia a diferentes representaciones*)

(v) *comparabilidad*

(vi) *continuidad*

Dos de estos supuestos ya los conocen bien por la discusión de órdenes de preferencias. El axioma (ii) de *transitividad* es básico a todos los ordenamientos de preferencias, por ejemplo, las teorías de utilidad ordinal que reemplazaron a las teorías de utilidad cardinal. El axioma (v) de *comparabilidad* implica que las preferencias son completas y están definidas sobre todos los premios.

Por otro lado, el axioma (iii) de *monotonicidad* es simplemente que si hay loterías que pueden dar dos premios, uno menor y otro mayor, con diferentes probabilidades, se prefiere una lotería que da mayor probabilidad al premio mayor y menor al premio menor. Esto cubre, como caso especial, también que se prefiere un premio mayor a otro premio menor (sería el caso donde las probabilidades de cada premio son 1). Es una versión de la idea de *dominancia* que es la base de la racionalidad, el principio estructurador de la economía.

El axioma (iv) de *reducción de lotería compuestas* es un caso particular de *invariancia a diferentes representaciones*, algo tan básico que en general está implícito: da lo mismo decir que el vaso está medio lleno o medio vacío, ya que ambos son dos formas equivalentes de describir el mismo vaso.

Eso nos deja con dos axiomas más. El axioma más específico de la teoría de utilidad esperado es el axioma (i) de *substitución*, que es uno de los que más se han cuestionado. El axioma (vi) de *continuidad* es un supuesto técnico de que siempre se puede encontrar una lotería que contiene el premio mayor y el premio menor que es justo indiferente a un premio monetario.

B. Aplicación de los axiomas para representar las loterías

Dado el carácter monetario de los premios, dado que existe una preferencia por más plata en lugar de menos por el axioma (iii) de *monotonicidad*, se cumple trivialmente el axioma (ii) de *transitividad* entre loterías. Lo mismo pasa con el axioma (v) de *comparabilidad* entre todas las loterías. Es decir, estos dos axiomas son redundantes en este caso de premios monetarios.

El axioma (vi) es el primero que tiene una consecuencia no trivial. Implica que si hay tres premios x_1, x_2, x_3, tal que se cumple $x_1 < x_2 < x_3$, entonces es posible encontrar una probabilidad ν tal que el individuo está indiferente entre el premio intermedio cierto y una lotería que consiste del premio menor y mayor:

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3).$$

Si alguien es indiferente al riesgo, entonces las probabilidades son tales que la lotería tiene un valor esperado igual a x_2. Si alguien tiene aversión al riesgo, va a pedir en cambio una mayor probabilidad del premio mayor (es decir, va a pedir un valor esperado mayor al actuarialmente justo), mientras que si tiene propensión al riesgo va a pedir una menor probabilidad del premio mayor (es decir, un valor esperado menor que el premio actuarialmente justo). Más abajo se describe esto.

Por el axioma (i) de *substitución,* si estamos indiferentes entre dos opciones *x* e *y*, también vamos a estar indiferentes entre dos loterías que sólo difieran en esas dos opciones. Además, si preferimos la opción *x* a *y*, vamos a preferir la lotería que contiene *x* a otra que contiene la opción *y* si no difiere en el resto de los resultados posibles. El *axioma de substitución* permite en particular reemplazar en una lotería *x* cualquier premio intermedio $x_i \in (x_1, x_3)$ por otro en términos de x_1 y x_3, ya que si el premio x_2 es indiferente a la lotería $(\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3)$, entonces

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim (p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3), p_3 \text{ de } x_3),$$

por lo que, sin pérdida de generalidad, todas las loterías se pueden reducir a loterías que solo constan del premio menor y mayor. Desde ya, este supuesto puede no ser trivial: si estamos indiferentes entre un helado de sambayón y limón, puede que no estemos indiferentes entre dulce de leche granizado con sambayón y dulce de leche granizado con limón. Pero ese caso de los helados es diferente, por la combinación de sabores en un mismo cucurucho, por lo que la unidad sería la combinación de sabores. En las loterías de von Neumann y Morgenstern, en cambio, hablamos de tres mundos paralelos posibles con probabilidades p_1, p_2 y p_3, donde se supone que, todo lo demás igual, la utilidad en el mundo dos es independiente de lo que sucede en los mundos uno y tres.[1]

[1] Por este axioma podemos ir en sentido inverso, que es el axioma de *cancelación*: si hay dos loterías que sólo difieren en los resultados de una de las opciones, mientras que los restantes opciones dan iguales resultados, podemos concentrarnos sólo en la opción que difiere, simplificando las loterías al eliminar aquellas alternativas que dan los mismos resultados. El axioma de *cancelación* se llama también axioma de *independencia* o axioma de *independencia de alternativas irrelevantes*, como hicieron von Neumann y Morgenstern.

El axioma (iv) de *la reducción de loterías compuestas* usado en Davis y Holt es un caso particular de la *invariancia a diferentes representaciones* que miran Tversky y Kahnemann. Por este axioma, una lotería compuesta de otras loterías se puede simplificar en términos de la probabilidad final de los distintos premios subyacentes. Para el caso recién descrito de la lotería x_2, tenemos que

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim ([p_1 + p_2 \nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3),$$

ya que ambas tienen la mismas probabilidades de ganar los premios subyacentes.

Podemos simplificar aún más las probabilidades en esta lotería x usando las expresiones siguientes: $\pi_1 = [p_1 + p_2\nu]$, $\pi_3 = [p_2(1-\nu) + p_3] = 1 - \pi_1$. De vuelta, esto nos lleva a otra representación equivalente de la lotería original:

$$([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3) \sim (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3).$$

C. Representación con una función de utilidad esperada (opcional)

Dada la representación de todas las loterías en términos del premio menor y mayor, podemos compararlas fácilmente. Por el axioma (iii) de *monotonicidad*, la lotería $x = (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3)$ va a ser preferida a la lotería $y = (\pi_1' \text{ de } x_1, \pi_3' \text{ de } x_3)$ si tiene una mayor probabilidad del premio mayor, es decir, si

$$\pi_3 > \pi_3'.$$

Es trivial mostrar ahora que esto permite la representación de las preferencias con una función de utilidad. Denotemos la utilidad de los premios mayor x_3 y menor x_1 por $U(x_3)$ y $U(x_1)$. Luego, si definimos la utilidad de cualquier premio como

$$U(x) = \pi_1 U(x_1) + \pi_3 U(x_3),$$

esta función de utilidad representa las preferencias subyacentes porque una lotería que tiene mayor utilidad es necesariamente una lotería que ofrece una mayor probabilidad del premio mayor. Como recién vimos, por monotonicidad tal lotería es preferida por el decisor. Si las preferencias sobre loterías cumplen con los seis axiomas de von Neumann y Morgenstern, pueden ser representadas por una función de utilidad esperada.

Resulta que cualquier transformación lineal creciente va a representar el mismo ordenamiento de preferencias bajo incertidumbre si $a > 0$, $b \in R$. Sea la función transformada $\widetilde{U}(x)$:

$$\widetilde{U}(x) = aU(x) + b\,.$$

Luego se sigue que

$$\mathrm{E}[U(x)] \geq \mathrm{E}[U(y)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[U'(x)] \geq \mathrm{E}[U'(y)]\,,$$

por las propiedades de transformaciones lineales crecientes:

$$\mathrm{E}[\widetilde{U}(x)] = a\,\mathrm{E}[U(x)] + b\,.$$

Es decir, para conservar el mismo ordenamiento no se puede someter la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern a cualquier transformación creciente, solo a una transformación *lineal* creciente. En esto, conserva algunas de las características de la utilidad cardinal.

Esto se diferencia tajantemente de la utilidad ordinal donde es válida cualquier *transformación creciente*: si la función original es lineal, se puede hacer con preferencias puramente ordinales una transformación cuadrática, que es convexa, o una transformación logarítmica, que es cóncava. En un caso de dos bienes, que se representan en el plano con curvas de indiferencia, para las preferencias ordinales solo interesa el ordenamiento de menor a mayor de las sucesivas curvas de indiferencia, no cómo van variando la altura de una curva a la otra. Pasamos a esto abajo en más detalle al hablar de actitudes frente al riesgo.

Dado que se pueden elegir arbitrariamente las constantes $a > 0$ y $b \in R$ en la representación de la utilidad, dado que cualquier transformación lineal creciente representa el mismo ordenamiento de alternativas en términos de utilidad esperada, si x_1 es el premio menor y x_3 es el mayor, se puede normalizar la función de utilidad de manera que $U'(x_1) = 0$, $U'(x_3) = 1$ (omitimos estos detalles).

D. Actitudes frente al riesgo y utilidad del ingreso

Davis y Holt, en su sección 2.4, tratan la maximización de la utilidad esperada y la aversión al riesgo. La función logarítmica de Bernoulli, es una función creciente (derivada primera positiva) y cóncava (derivada segunda negativa). La idea de concavidad de la función de utilidad, con una derivada segunda negativa, fue incorporada en la revolución marginalista de 1870 como utilidad marginal decreciente de un bien y luego como utilidad marginal decreciente del ingreso (esto último llevó a argumentos para la redistribución del ingreso)..

Estas discusiones fueron abandonadas cuando el enfoque cardinal de la utilidad fue reemplazado alrededor de 1930 por el enfoque ordinal de la utilidad, ya que no se permiten hacer no solo comparaciones interpersonales de utilidad, sino comparaciones intrapersonales de niveles de utilidad, ya que se toman los niveles absolutos de utilidad como algo puramente arbitrario (lo “útiles” de la revolución marginalista no se consideraron una unidad de medida como el metro, la temperatura o el dinero).

La idea más amplia de utilidad esperada tuvo que esperar otros tres cuartos de siglo para ser incorporada a la economía, lo que sucede a partir de la obra de 1944 de von Neumann y Morgenstern sobre teoría de juegos. Como vimos, la utilidad propuesta por Bernoulli fue axiomatizada por von Neumann y Morgenstern, por lo que la teoría de utilidad esperada se suele llamar utilidad de von Neumann y Morgenstern. Tiene ciertas de las propiedades de la utilidad cardinal, como por ejemplo una derivada segunda con un signo definido. El signo de esta derivada segunda puede ser nulo (indiferencia al riesgo), negativo (aversión al riesgo) o positivo (propensión al riesgo). La diferencia con la utilidad cardinal es que no hay comparabilidad interpersonal de utilidades, ya que cada escala es arbitraria dado que cualquier transformación lineal creciente también es una representación de las mismas preferencias. Pero sí hay un orden cardinal *para un mismo individuo*.

Indiferencia al riesgo

El valor esperado y la utilidad esperada de una lotería llevan a resultados similares cuando hay indiferencia al riesgo. El caso de indiferencia al riesgo se puede representar por una utilidad lineal en el ingreso:

$$U(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[x].$$

Es decir, si una lotería tiene mayor valor esperada que otra, una persona indiferente al riesgo va a preferir la lotería con mayor valor esperado. Por tanto, maximizar la utilidad es lo mismo que maximizar el valor esperado. Uno puede esperar que las preferencias van a ser lineales para apuestas “chicas”.

Volviendo a lo que hicimos más arriba, cuando usamos el axioma de continuidad, el premio x_2 que era justo indiferente a la lotería del premio mayor y menor,

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3),$$

es en este caso tal que

$$x_2 = \nu\, x_1 + (1-\nu)\, x_3.$$

Es decir, las probabilidades ν y $(1-\nu)$ son determinadas de forma actuarialmente justas.

Aversión al riesgo

El ranking según valor esperado y utilidad esperada pueden diferir una vez que hay aversión o propensión al riesgo. Con aversión al riesgo, una consecuencia es que la utilidad esperada de un premio va a ser menor que la utilidad de la esperanza del premio (que es medio un trabalenguas). Es decir, el valor esperado de la lotería que se exige para aceptar el riesgo va ser mayor que el premio cierto x_2 :

$$x_2 < \nu^A \; x_1 + (1-\nu^A) \; x_3 ,$$

donde se cumple que $\nu^A < \nu$, es decir, la probabilidad del premio menor va a ser menor que la probabilidad actuarialmente justa.

Propensión al riesgo

Se cumple aquí que el premio cierto que resulta indiferente a la lotería tiene un valor mayor que el valor esperado de la lotería:

$$x_2 > \nu^P \; x_1 + (1-\nu^P) \; x_3 ,$$

donde se cumple que $\nu^P > \nu$, es decir, la probabilidad del premio menor es mayor a la probabilidad actuarialmente justa.

Descripción de conductas que pueden ser tanto cuidadosas como riesgosas

Si la utilidad es cóncava y tiene derivada segunda negativa, va a implicar aversión al riesgo (ese es el caso de la función logarítmica usada por Bernoulli). En cambio, en caso de propensión al riesgo, se puede representar por funciones convexas.

Como no siempre evitamos las apuestas, Friedman y Savage critican la formulación de Bernoulli de utilidad marginal del ingreso siempre decreciente en un artítulo de 1948, planteando en cambio una función de utilidad con un segmento convexo (con preferencia al riesgo) y otro cóncavo (con aversión al riesgo). Si la función de utilidad está acotada abajo y arriba, una consecuencia que plantean Blackwell y Girshick en 1954 es que la utilidad primero va a tener un tramo convexo y luego un segmento cóncavo. Un ejemplo de esa forma de curva es la curva logística.