

**Temas**

1. El principio de racionalidad
2. La paradoja de San Petesburgo
3. El principio de utilidad esperada
4. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern
5. Experimento de mercado basado en Cournot

**Desarrollo**

**1. El principio de racionalidad: maximizar pagos monetarios y maximizar utilidad**

Adam Smith plantea el principio de interés propio como guía de las acciones individuales. Cournot presenta una formalización en el contexto de pagos monetarios, las empresas que maximizan sus beneficios. Este es el principio de racionalidad estrecho.

Más en general, la maximización del pago monetario propio no alcanza para contextos donde influyen factores no monetarios, o directamente no hay pagos monetarios directos. Por eso, en el caso más general, la racionalidad individual se plantea en términos de maximización de la utilidad, como sucede por ejemplo en la teoría del consumo. Este es el principio de racionalidad amplio.

Si hay incertidumbre, hace falta generalizar la idea de maximización de utilidad. Vamos a verlo primero con un ejemplo concreto. Luego, vamos a dar los fundamentos de la maximización de la utilidad bajo incertidumbre, que fue un aporte clave de von Neumann y Morgenstern.

**2. La paradoja de San Petesburgo**

Históricamente, el tema de la decisión bajo incertidumbre aparece a principios del siglo XVIII con Daniel Bernoulli, que resuelve en 1738 la paradoja de San Petesburgo propuesta en 1713 por Nicolás Bernoulli, otro matemático y primo suyo proponiendo usar una función de utilidad.

La paradoja de San Petesburgo es un experimento mental que involucra una lotería que da un premio de:

- 2 rublos con probabilidad  $\frac{1}{2}$ ;
- 4 rublos con probabilidad de  $\frac{1}{4}$ ;
- 8 rublos con probabilidad  $\frac{1}{8}$ ;
- y así sucesivamente.

O sea que hay premios de  $2^n$  rublos con probabilidad  $(1/2)^n$ , para  $n = 1,2,3,\dots,N$ . Por tanto, la suma (el valor esperado) es  $N$  si hay  $N$  vueltas. Si  $N$  tiende a infinito, el valor esperado también. Sin embargo, nadie estaba dispuesto a pagar mucho por esta lotería.

Laplace planteó que, para  $N$  muy grande, no hay banca que pueda aceptar la apuesta en forma creíble, así que eso desde ya es un tema a nivel práctico (también está limitado lo que uno puede apostar por la restricción presupuestaria individual). Por eso, consideremos qué sucede para el caso de  $N=1000$ , que promete un premio en promedio de 1000 rublos (piensen en todo caso en pesos). Las respuestas en clase sobre la disposición a pagar fueron 2 (la más numerosa), 3, 4, 8, 9, 10 y 100. Es decir, nadie estaba dispuesto a pagar el valor esperado sino menos. Esta es la experiencia típica para este caso (parece que el valor modal es entre 2 y 3 rublos).

La clave de la solución que ofrece Bernoulli es que no se puede explicar el comportamiento respecto a esta lotería por su valor esperado. Lo que propone Bernoulli es que a los individuos no les interesa el premio  $x$  sino la utilidad del premio  $U(x)$ . Si la distribución de probabilidad es discreta, el valor esperado está dado por

$$E[x] = \sum p x_i ,$$

y la utilidad esperada por

$$E[U(x)] = \sum p_i U(x_i).$$

Bernoulli propuso en particular una utilidad logarítmica, que es cóncava y lleva a una utilidad marginal decreciente del ingreso. Nosotros consideramos el logaritmo en base 10, donde  $\log_{10} 1 = 0$ ,  $\log_{10} 10 = 1$  y  $\log_{10} 100 = 2$ , por lo que queda claro que hay que ofrecer cada vez mayores montos para que aumente lo mismo la utilidad (y un mismo aumento de riqueza genera montos decrecientes de utilidad). El planteo de Bernoulli fue con logaritmos naturales:

$$U(x) = \ln x \Rightarrow E[U(x)] = E[\ln x] = \sum p_i \ln x_i.$$

Como demostró Bernoulli para el caso de la paradoja de San Petesburgo, el individuo no va a estar dispuesto a apostar mucho en este caso incluso en el caso de que el premio esperado sea infinito (la respuesta que le da es un poco más de 2 rublos, lo que está cerca del valor modal del curso).

Sin embargo, la función de utilidad logarítmica no alcanza para explicar por qué no se acepta apostar mucho por otras loterías que tienen también un valor esperado infinito, por ejemplo, ganar 2 pesos con probabilidad  $\frac{1}{2}$  o ganar  $2^n$  pesos con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Para eso hace falta introducir una característica adicional, que la función de utilidad es acotada, a lo que volvemos después.

### **3. Teoría de la utilidad esperada**

Lo que mostraron von Neumann y Morgenstern es que la utilidad esperada introducida por Daniel Bernoulli se podía derivar de una serie de axiomas simples.

#### **A. Los axiomas de von Neumann y Morgenstern**

Vamos a seguir básicamente la discusión en el apéndice 3 del capítulo 2 de Davis y Holt (1993) sobre este tema, que plantean una derivación a partir de seis axiomas:

(i) *substitución*

(ii) *transitividad*

(iii) *dominancia* (Davis y Holt toman *la monotonicidad*, dado el carácter monetario de los premios que estudian)

(iv) *invariancia a diferentes representaciones* (Davis y Holt usan un caso particular, *la reducción de lotería compuestas*)

(v) *comparabilidad*

(vi) *continuidad*

Dos de estos supuestos ya los conocen bien por la discusión de órdenes de preferencias. El axioma (ii) de *transitividad* es básico a todos los ordenamientos de preferencias, por ejemplo, las teorías de utilidad ordinal que reemplazaron a las teorías de utilidad cardinal. El axioma (v) de *comparabilidad* implica que las preferencias son completas y están definidas sobre todos los premios.

Por otro lado, el axioma (iii) de *dominancia* es la base de la racionalidad, el principio estructurador de la economía. En su versión de *monotonicidad*, es simplemente que si hay loterías que pueden dar dos premios, uno menor y otro mayor, con diferentes probabilidades, se prefiere una lotería que da mayor probabilidad al premio mayor y menor al premio menor. Esto cubre, como caso especial, también que se prefiere un premio mayor a otro premio menor (sería el caso donde las probabilidades de cada premio son 1).

El axioma (iv) de *invariancia a diferentes representaciones* es tan básico que en general está implícito: da lo mismo decir que el vaso está medio lleno o medio vacío, ya que ambos son dos formas equivalentes de describir el mismo vaso.

Eso nos deja con dos axiomas más. El axioma más específico de la teoría de utilidad esperado es el axioma (i) de *substitución*, que es uno de los que más se han cuestionado. El axioma (vi) de *continuidad* es un supuesto técnico de que siempre se puede encontrar una lotería que contiene el premio mayor y el premio menor que es justo indiferente a un premio monetario.

## **B. Aplicación de los axiomas para representar las loterías**

Dado el carácter monetario de los premios, dado que existe una preferencia por más plata en lugar de menos por el axioma (iii) de *monotonicidad*, se cumple trivialmente el

axioma (ii) de *transitividad* entre loterías. Lo mismo pasa con el axioma (v) de *comparabilidad* entre todas las loterías. Es decir, estos dos axiomas son redundantes en este caso de premios monetarios.

El axioma (vi) es el primero que tiene una consecuencia no trivial. Implica que si hay tres premios  $x_1, x_2, x_3$ , tal que se cumple  $x_1 < x_2 < x_3$ , entonces es posible encontrar una probabilidad  $\nu$  tal que el individuo está indiferente entre el premio intermedio cierto y una lotería que consiste del premio menor y mayor:

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1 - \nu) \text{ de } x_3).$$

Por el axioma (i) de *substitución*, si estamos indiferentes entre dos opciones  $x$  e  $y$ , también vamos a estar indiferentes entre dos loterías que sólo difieran en esas dos opciones. Además, si preferimos la opción  $x$  a  $y$ , vamos a preferir la lotería que contiene  $x$  a otra que contiene la opción  $y$  si no difiere en el resto de los resultados posibles. El *axioma de substitución* permite en particular reemplazar en una lotería  $x$  cualquier premio intermedio  $x_i \in (x_1, x_3)$  por otro en términos de  $x_1$  y  $x_3$ , ya que si el premio  $x_2$  es indiferente a la lotería  $(\nu \text{ de } x_1, (1 - \nu) \text{ de } x_3)$ , entonces

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim (p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } (\nu \text{ de } x_1, (1 - \nu) \text{ de } x_3), p_3 \text{ de } x_3),$$

por lo que, sin pérdida de generalidad, todas las loterías se pueden reducir a loterías que solo constan del premio menor y mayor. Desde ya, este supuesto puede no ser trivial: si estamos indiferentes entre un helado de sambayón y limón, puede que no estemos indiferentes entre dulce de leche granizado con sambayón y dulce de leche granizado con limón. Pero ese caso de los helados es diferente, por la combinación de sabores en un mismo cucurucho, por lo que la unidad sería la combinación de sabores. En las loterías de von Neumann y Morgenstern, en cambio, hablamos de tres mundos paralelos posibles con

probabilidades  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ , donde se supone que, todo lo demás igual, la utilidad en el mundo dos es independiente de lo que sucede en los mundos uno y tres.<sup>1</sup>

El axioma (iv) de *invariancia a diferentes representaciones* cubre el axioma de *la reducción de loterías compuestas* usado en Davis y Holt. Por este axioma, una lotería compuesta de otras loterías se puede simplificar en términos de la probabilidad final de los distintos premios subyacentes. Para el caso recién descrito de la lotería  $x_2$ , tenemos que

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim ([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3),$$

ya que ambas tienen la mismas probabilidades de ganar los premios subyacentes.

Podemos simplificar aún más las probabilidades en esta lotería  $x$  usando las expresiones siguientes:  $\pi_1 = [p_1 + p_2\nu]$ ,  $\pi_3 = [p_2(1-\nu) + p_3] = 1 - \pi_1$ . De vuelta, esto nos lleva a otra representación equivalente de la lotería original:

$$([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3) \sim (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3).$$

### C. Representación con una función de utilidad esperada

Dada la representación de todas las loterías en términos del premio menor y mayor, podemos compararlas fácilmente. Por el axioma (iii) de *monotonidad*, la lotería  $x = (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3)$  va a ser preferida a la lotería  $y = (\pi_1' \text{ de } x_1, \pi_3' \text{ de } x_3)$  si tiene una mayor probabilidad del premio mayor, es decir, si

$$\pi_3 > \pi_3'.$$

---

<sup>1</sup> Por este axioma podemos ir en sentido inverso, que es el axioma de *cancelación*: si hay dos loterías que sólo difieren en los resultados de una de las opciones, mientras que los restantes opciones dan iguales resultados, podemos concentrarnos sólo en la opción que difiere, simplificando las loterías al eliminar aquellas alternativas que dan los mismos resultados. El axioma de *cancelación* se llama también axioma de *independencia* o axioma de *independencia de alternativas irrelevantes*, como hicieron von Neumann y Morgenstern.

Es trivial mostrar ahora que esto permite la representación de las preferencias con una función de utilidad. Denotemos la utilidad de los premios mayor  $x_3$  y menor  $x_1$  por  $U(x_3)$  y  $U(x_1)$ . Luego, si definimos la utilidad de cualquier premio como

$$U(x) = \pi_1 U(x_1) + \pi_3 U(x_3),$$

esta función de utilidad representa las preferencias subyacentes porque una lotería que tiene mayor utilidad es necesariamente una lotería que ofrece una mayor probabilidad del premio mayor. Como recién vimos, por monotonidad tal lotería es preferida por el decisor.

En conclusión, si las preferencias sobre loterías cumplen con los seis axiomas de von Neumann y Morgenstern, pueden ser representadas por una función de utilidad esperada.

#### **D. Representaciones alternativas de la función de utilidad**

Resulta que cualquier transformación lineal creciente va a representar el mismo ordenamiento de preferencias bajo incertidumbre si  $a > 0$ ,  $b \in R$ . Sea la función transformada  $\tilde{U}(x)$ :

$$\tilde{U}(x) = aU(x) + b.$$

Luego se sigue que

$$E[U(x)] \geq E[U(y)] \Leftrightarrow E[\tilde{U}(x)] \geq E[\tilde{U}(y)],$$

por las propiedades de transformaciones lineales crecientes:

$$E[\tilde{U}(x)] = a E[U(x)] + b.$$

Es decir, para conservar el mismo ordenamiento no se puede someter la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern a cualquier transformación creciente, solo a una

transformación *lineal* creciente. En esto, conserva algunas de las características de la utilidad cardinal.

Esto se diferencia tajantemente de la utilidad ordinal donde es válida cualquier *transformación creciente*: si la función original es lineal, se puede hacer con preferencias puramente ordinales una transformación cuadrática, que es convexa, o una transformación logarítmica, que es cóncava. En un caso de dos bienes, que se representan en el plano con curvas de indiferencia, para las preferencias ordinales solo interesa el ordenamiento de menor a mayor de las sucesivas curvas de indiferencia, no cómo van variando la altura de una curva a la otra. Pasamos a esto abajo en más detalle al hablar de actitudes frente al riesgo.

Dado que se pueden elegir arbitrariamente las constantes  $a > 0$  y  $b \in R$  en la representación de la utilidad, dado que cualquier transformación lineal creciente representa el mismo ordenamiento de alternativas en términos de utilidad esperada, si  $x_1$  es el premio menor y  $x_3$  es el mayor, se puede normalizar la función de utilidad de manera que  $U'(x_1) = 0$ ,  $U'(x_3) = 1$  (omitimos estos detalles).

## **E. Actitudes frente al riesgo y utilidad del ingreso**

Davis y Holt, en su sección 2.4, tratan la maximización de la utilidad esperada y la aversión al riesgo.

La función logarítmica de Bernoulli, es una función creciente (derivada primera positiva) y cóncava (derivada segunda negativa). La idea de concavidad de la función de utilidad, con una derivada segunda negativa, fue incorporada en la revolución marginalista de 1870 como utilidad marginal decreciente de un bien y luego como utilidad marginal decreciente del ingreso (esto último llevó a argumentos para la redistribución del ingreso)..

Estas discusiones fueron abandonadas cuando el enfoque cardinal de la utilidad fue reemplazado alrededor de 1930 por el enfoque ordinal de la utilidad, ya que no se permiten hacer no solo comparaciones interpersonales de utilidad, sino comparaciones intrapersonales de niveles de utilidad, ya que se toman los niveles absolutos de utilidad como algo puramente arbitrario (lo “útiles” de la revolución marginalista no se consideraron una unidad de medida como el metro, la temperatura o el dinero).



La idea más amplia de utilidad esperada tuvo que esperar otros tres cuartos de siglo para ser incorporada a la economía, lo que sucede a partir de la obra de 1944 de von Neumann y Morgenstern sobre teoría de juegos. Como vimos, la utilidad propuesta por Bernoulli fue axiomatizada por von Neumann y Morgenstern, por lo que la teoría de utilidad esperada se suele llamar utilidad de von Neumann y Morgenstern. Tiene ciertas de las propiedades de la utilidad cardinal, como por ejemplo una derivada segunda con un signo definido. El signo de esta derivada segunda puede ser nulo (indiferencia al riesgo), negativo (aversión al riesgo) o positivo (propensión al riesgo). La diferencia con la utilidad cardinal es que no hay comparabilidad interpersonal de utilidades, ya que cada escala es arbitraria dado que cualquier transformación lineal creciente también es una representación de las mismas preferencias. Pero sí hay un orden cardinal *para un mismo individuo*.

### **Indiferencia al riesgo**

El valor esperado y la utilidad esperada de una lotería llevan a resultados similares cuando hay indiferencia al riesgo. El caso de indiferencia al riesgo se puede representar por una utilidad lineal en el ingreso:

$$U(x) = x \Rightarrow E[U(x)] = E[x].$$

Es decir, si una lotería tiene mayor valor esperada que otra, una persona indiferente al riesgo va a preferir la lotería con mayor valor esperado. Por tanto, maximizar la utilidad es lo mismo que maximizar el valor esperado. Uno puede esperar que las preferencias van a ser lineales para apuestas “chicas”.

Volviendo a lo que hicimos más arriba, cuando usamos el axioma de continuidad, el premio  $x_2$  que era justo indiferente a la lotería del premio mayor y menor,

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1 - \nu) \text{ de } x_3),$$

es en este caso tal que

$$x_2 = \nu x_1 + (1 - \nu) x_3.$$

Es decir, las probabilidades  $\nu$  y  $(1 - \nu)$  son determinadas de forma actuarialmente justas.

### **Aversión al riesgo**

El ranking según valor esperado y utilidad esperada pueden diferir una vez que hay aversión o propensión al riesgo. Con aversión al riesgo, una consecuencia es que la utilidad esperada de un premio va a ser menor que la utilidad de la esperanza del premio (que es medio un trabalenguas). Es decir, el valor esperado de la lotería que se exige para aceptar el riesgo va a ser mayor que el premio cierto  $x_2$  :

$$x_2 < \nu^A x_1 + (1 - \nu^A) x_3,$$

donde se cumple que  $\nu^A < \nu$ , es decir, la probabilidad del premio menor va a ser menor que la probabilidad actuarialmente justa.

### **Propensión al riesgo**

Se cumple aquí que el premio cierto que resulta indiferente a la lotería tiene un valor mayor que el valor esperado de la lotería:

$$x_2 > \nu^P x_1 + (1 - \nu^P) x_3,$$

donde se cumple que  $\nu^P > \nu$ , es decir, la probabilidad del premio menor es mayor a la probabilidad actuarialmente justa.

### **Descripción de conductas que pueden ser tanto cuidadosas como riesgosas**

Si la utilidad es cóncava y tiene derivada segunda negativa, va a implicar aversión al riesgo (ese es el caso de la función logarítmica usada por Bernoulli). En cambio, en caso de propensión al riesgo, se puede representar por funciones convexas.

Como no siempre evitamos las apuestas, Friedman y Savage critican la formulación de Bernoulli de utilidad marginal del ingreso siempre decreciente en un artículo de 1948, planteando en cambio una función de utilidad con un segmento convexo (con preferencia al riesgo) y otro cóncavo (con aversión al riesgo).

Si la función de utilidad está acotada abajo y arriba, una consecuencia que plantean Blackwell y Girshick en 1954 es que la utilidad primero va a tener un tramo convexo y luego un segmento cóncavo. Un ejemplo de esa forma de curva es la curva logística.

#### **4. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern**

Von Neumann y Morgenstern han tenido una gran influencia en la economía moderna, pero más en términos de enfocar la economía como una cuestión estratégica que en su propuesta de una solución de equilibrio, ya que ahora lo que se usa es el concepto de equilibrio de Nash propuesto por Nash en 1950.

Pero hay un gran aporte específico de estos autores, la teoría de utilidad esperada que sirve para modelar las decisiones bajo incertidumbre. Esto está en la base del análisis de teoría de juegos, donde inherentemente hay incertidumbre endógena (¿qué va a hacer el otro jugador?). Además, es fundamental también en problemas de decisión donde hay incertidumbre exógena (por ejemplo, los agricultores y el clima). Recién discutimos eso.

En el pasaje de su libro sobre *Teoría de juegos y comportamiento económico* de 1944, plantean la diferencia de su enfoque estratégico con el enfoque convencional, que denominan el “enfoque de mercado”. El enfoque de mercado es que el consumidor maximiza utilidad, el empresario beneficios. Se dice que maximizar es actuar racionalmente, pero ellos hacen notar que esto depende del conocimiento y entendimiento de los cursos de acción que tiene abiertos el decisor.

El caso de Robinson Crusoe es un problema de máximo (condicionado) común cuyas variables controla el decisor [de esta manera describe por ejemplo Samuelson el problema económico en sus *Fundamentos del análisis económico* de 1947]. Sin embargo, el

problema del participante en economía social es diferente al problema de Robinson Crusoe: es conseguir el máximo de algo que no se controla. Esto no se trata en la matemática clásica: si los intereses no son paralelos, no es problema simple de máximo, sino de juegos de estrategia. La interdependencia de acciones es reconocida en los problemas clásicos de duopolio y oligopolio, por el lado de la oferta [esto y lo que sigue remiten a Cournot, al que después volvemos]. Del lado de la demanda se suponen muchos demandantes, por lo que no hay comportamiento estratégico.

Cuando hay grandes números se toma la competencia como límite: pero hay que tener cuidado de que no se formen coaliciones de un pequeño número de jugadores. La escuela de Lausanne [es decir, la teoría de equilibrio general desarrollado por Walras] que supone que no se forman coaliciones tiene que ser verificada. [Nash después va a plantear la diferencia entre teoría de juegos no cooperativa, donde no hay coaliciones, y teoría de juegos cooperativa, donde sí hay.]

## **5. Experimento de mercado basado en duopolio Cournot**

### **A. Instrucciones**

Este experimento está tomado de un artículo de Charles Holt que salió en el volumen 75 del *American Economic Review*. Hay dos empresas, fila (empresa 1) y columna (empresa 2). Las estrategias de cada empresa son niveles de producción  $q = 4, 5, 6, \dots, 22$ . Las empresas eligen simultáneamente el nivel de producción. Los beneficios o pagos de cada empresa  $(\pi_1, \pi_2)$  dependen de los niveles de producción  $(q_1, q_2)$ .

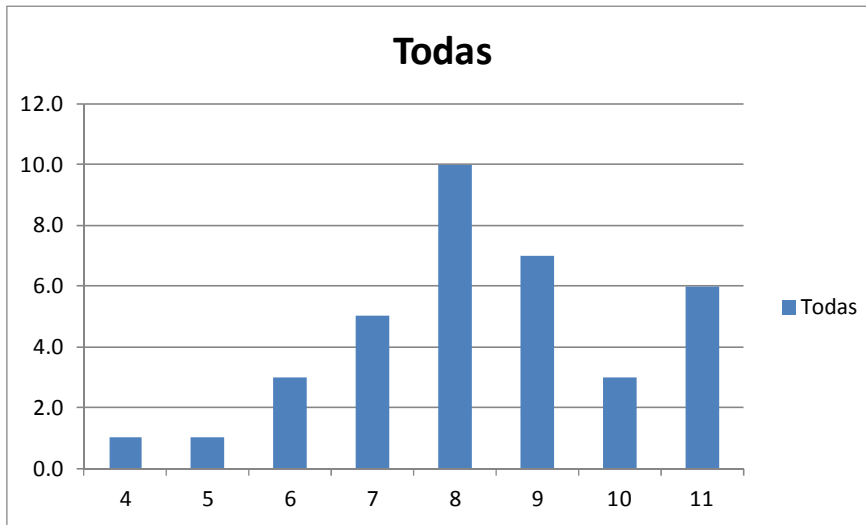
Ustedes son el jugador columna que tiene que elegir la columna. Se hacen tres rondas de mercado. Ustedes tienen que hacer como si los pagos monetarios ficticios fueran pagos monetarios reales.

### **B. Resultados**

El gráfico 1 suma los resultados de las tres rondas. Como eran 6 mercados, hay en total 22 niveles de producción cada período (a lo largo de las tres vueltas, hay 36 observaciones).

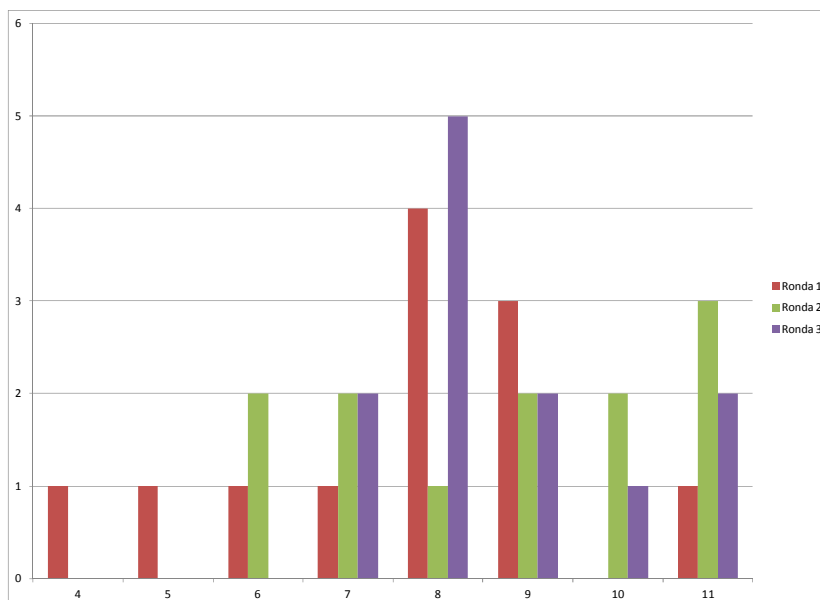
El valor modal, o la elección más común, en las tres rondas fue jugar 8, elegido 10 veces (un 28% de las veces). El valor promedio de las tres rondas fue de 8.3.

**Gráfico 1. Resultado tomando el promedio de las tres rondas**



El gráfico 2 muestra las tres rondas lado a lado. El valor 8 fue el valor modal en las rondas 1 y 3. Puede pensarse la elección de ustedes como una predicción de cómo hay que jugar este juego. Después lo comparamos con las predicciones del equilibrio de Nash de este juego.

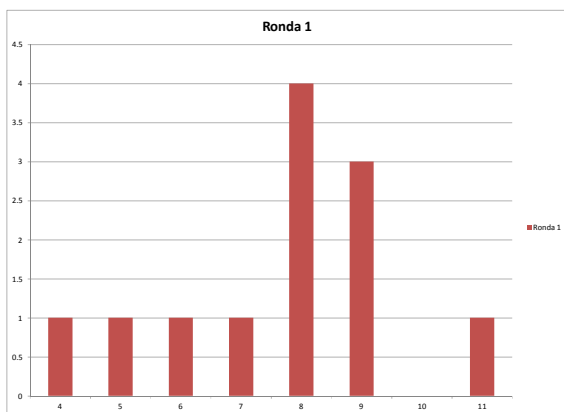
**Gráfico 2. Resultado de las tres rondas en un mismo gráfico**



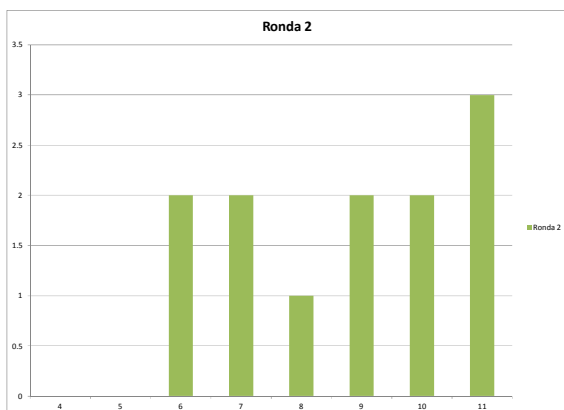
Igual, se complica mirar todo en un mismo gráfico. Haciendo un histograma de las sucesivas rondas, tenemos los tres paneles del gráfico 3. El valor mediano en las sucesivas rondas es de 8, 9 y 8. La media, que está más afectada por los valores extremos, fue por su parte de 7.7, 8.8 y 8.7.

**Gráfico 3. Resultado en cada una de las tres rondas**

**A. Ronda 1**



**B. Ronda 2**



**C. Ronda 3**

