Historia del pensamiento económico **Jorge M. Streb**

Clase 6 **21 de septiembre de 2012**

Temas

1. El principio de racionalidad
2. La paradoja de San Petesburgo
3. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern
4. El principio de utilidad esperada

Desarrollo

1. El principio de racionalidad

A. ¿Racionalidad en referencia a qué?

En la versión del duopolio de Cournot que hace Charles Holt, nosotros discutimos los equilibrios de Nash tomando como objetivos de los jugadores sus propios pagos monetarios. Ese punto de vista de racionalidad nos llevó a centrarnos en las estrategias entre 6 y 10, que son las únicas que no están estrictamente dominadas después de iterar. Dado es, dijimos que las estrategias de elegir 11 o más eran irracionales, o, más técnicamente, eran estrategias estrictamente dominadas, ya que siempre llevan a ganar menos que la estrategia de producir 10 (una vez que eliminamos estas estrategias, 4 y 5 también dejaron de tener sentido).

Sin embargo, si el objetivo de los jugadores fuera otro, por ejemplo maximizar la diferencia entre su ganancia monetaria y la del otro jugador (un comportamiento "rivalístico"), las estrategias que son racionales cambian.

Dado el objetivo de maximizar los pagos monetarios propios, encontramos en el rango de 6 a 10 un equilibrio de Nash, aquél con las estrategias (8,8), que es el único equilibrio de Nash que no implica estrategias débilmente dominadas — estas son más riesgosas con incertidumbre sobre qué elegirá el otro jugador, es decir, es el único equilibrio de Nash resistente a las sacudidas —.

Sin embargo, si el objetivo de los jugadores fuera no maximizar sus propios pagos monetarios, sino ganar más que el otro jugador, ninguno de los equilibrios de Nash identificados la clase pasada subsisten: ambos jugadores tienen un incentivo para desviarse y producir más. Esto nos lleva al equilibrio (12,12), así como también al equilibrio (11,11). Esto puede ayudar a explicar parte de las elecciones, que estuvieron en 10 u 11. Es decir, pudo haber algo de comportamiento rivalístico en el juego de la clase pasada.

Sin embargo, en la última ronda primó más la elección de 8 (9 elecciones en la última ronda) que la elección de 11 (3 elecciones la última ronda) y 12 (nadie lo eligió).

B. Maximizar pagos monetarios y maximizar utilidad

Adam Smith plantea el principio de interés propio (que distingue del egoísmo, por oposición a Mandeville) como guía de las acciones individuales. Cournot presenta una formalización en el contexto de pagos monetarios, las empresas que maximizan sus beneficios. Este el el principio de racionalidad estrecho.

Sin embargo, se pueden modelar otros objetivos, como el que vimos de maximizar la diferencia de pagos. Para esto tenemos que presentar la discusión en términos de maximizar la utilidad, donde en la función de utilidad el pago monetario propio tiene peso de uno, mientras que el pago monetario del otro decisor tiene un peso de menos uno.

Más en general, la maximización del pago monetario propio no alcanza para contextos donde influyen factores no monetarios, o directamente no hay pagos monetarios directos. Por eso, en el caso más general, la racionalidad individual se plantea en términos de maximización de la utilidad, como sucede por ejemplo en la teoría del consumo. Este el el principio de racionalidad amplio.

Si hay incertidumbre, hace falta generalizar la idea de maximización de utilidad. Dar los fundamentos de la maximización de la utilidad bajo incertidumbre fue un aporte clave de von Neumann y Morgenstern.

2. La paradoja de San Petesburgo

Históricamente, el tema de la decisión bajo incertidumbre aparece a principios del siglo XVIII con Daniel Bernoulli, que resuelve en 1738 la paradoja de San Petesburgo propuesta en 1713 por Nicolás Bernoulli, otro matemático y primo suyo. Esta paradoja involucra una lotería que da un premio de:

- 2 rublos con probabilidad ½;
- 4 rublos con probabilidad de ¼;
- 8 rublos con probabilidad 1/8;
- y así sucesivamente.

O sea que hay premios de 2^n rublos con probabilidad $(1/2)^n$, para n = 1,2,3,...,N. Por tanto, la suma (el valor esperado) es N si hay N vueltas. Si N tiende a infinito, el valor esperado también. Sin embargo, nadie estaba dispuesto a pagar mucho por esta lotería.

Cuando pregunté al curso, para el caso de N=100, que promete un premio en promedio de 100 rublos, las respuestas que obtuve sobre la disposición a pagar fueron 10, 7, o 2 (sin contar los que no estuvieron dispuestos a ofrecer nada). Es decir, nadie estaba dispuesto a pagar el valor esperado sino menos. Esta es la experiencia típica para este caso (parece que el valor modal es entre 2 y 3 rublos).

La clave de la solución que ofrece Bernoulli es que no se puede explicar el comportamiento respecto a esta lotería por su valor esperado. Lo que propone Bernoulli es que a los individuos no les interesa el premio x sino la utilidad del premio $U(x)$. Si la distribución de probabilidad es discreta, mientras que el valor esperado está dado por

$$\mathrm{E}[x] = \sum px_i \ ,$$

la utilidad esperada está dada por:

$$\mathrm{E}[U(x)] = \sum p_i U(x_i) \ .$$

Bernoulli propuso en particular una utilidad logarítmica, que es cóncava y lleva a una utilidad marginal decreciente del ingreso:

$$U(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[\ln x] = \Sigma p_i \ln x_i \,.$$

Como demostró Bernoulli para el caso de la paradoja de San Petesburgo, el individuo no va a estar dispuesto apostar mucho en este caso incluso en el caso de que el premio esperado sea infinito (la respuesta que le da es un poco más de 2 rublos).

Sin embargo, la función de utilidad logarítmica no alcanza para explicar por qué no se acepta apostar mucho por otras loterías que tienen también un valor esperado infinito, por ejemplo, ganar 2 pesos con probabilidad ½ o ganar 2^n pesos con probabilidad ½. Para eso hace falta introducir una característica adicional, que la función de utilidad es acotada, a lo que volvemos al final.

3. Enfoque de la economía en von Neumann y Morgenstern

Discutimos un pasaje de su libro sobre *Teoría de juegos y comportamiento económico* de 1944, donde plantean lo que sigue.

El enfoque de mercado es que el consumidor maximiza utilidad, el empresario beneficios. Se dice que maximizar es actuar racionalmente, pero esto depende de conocimiento y entendimiento de cursos de acción que tiene abiertos el decisor.

El caso de Robinson Crusoe es un problema de máximo (condicionado) común cuyas variables controla el decisor [de esta manera describe por ejemplo Samuelson el problema económico en sus *Fundamentos del análisis económico* de 1947].

Sin embargo, el problema del participante en economía social es diferente al problema de Robinson Crusoe: es conseguir el máximo de algo que no se controla. Esto no se trata en la matemática clásica: si los intereses no son paralelos, no es problema simple de máximo, sino de juegos de estrategia. La interdependencia de acciones es reconocida en los problemas clásicos de duopolio y oligopolio, por el lado de la oferta [esto y lo que sigue remiten a Cournot]. Del lado de la demanda se suponen muchos demandantes, por lo que no hay comportamiento estratégico.

Cuando hay grandes números se toma la competencia como límite: pero hay que tener cuidado de que no se formen coaliciones de un pequeño número de jugadores. La escuela de Lausanne [es decir, la teoría de equilibrio general desarrollado por Walras] que supone que no se forman coaliciones tiene que ser verificada. [Nash después va a plantear la diferencia entre teoría de juegos no cooperativa, donde no hay coaliciones, y teoría de juegos cooperativa, donde sí hay.]

Von Neumann y Morgenstern han tenido una gran influencia en la economía moderna, pero más en términos de enfocar la economía como una cuestión estratégica que en su propuesta de una solución de equilibrio, ya que ahora lo que se usa es el concepto de equilibrio de Nash propuesto por Nash en 1950.

Pero hay un gran aporte específico de estos autores, la teoría de utilidad esperada que sirve para modelar las decisiones bajo incertidumbre. Esto está en la base del análisis de teoría de juegos, donde inherentemente hay incertidumbre endógena (¿qué va a hacer el otro jugador?). Además, es fundamental también en problemas de decisión donde hay incertidumbre exógena (por ejemplo, los agricultores y el clima). Ahora pasamos a esto.

4. Teoría de la utilidad esperada

A. Los axiomas de von Neumann y Morgenstern

Lo que mostraron von Neumann y Morgenstern es que la utilidad esperada se podía derivar de una serie de axiomas simples. Vamos a seguir básicamente la discusión en el apéndice 3 del capítulo 2 de Davis y Holt (1993) sobre este tema, que plantean una derivación a partir de seis axiomas:

(i) *substitución*;

(ii) t*ransitividad*;

(iii) *dominancia* (Davis y Holt toman *la monotonicidad*, dado el carácter monetario de los premios que estudian);

(iv) *invariancia a diferentes representaciones* (Davis y Holt usan un caso particular, *la reducción de lotería compuestas*)*;*

(v) *comparabilidad*;

(vi) *continuidad*.

El axioma (ii) es básico a todos los ordenamientos de preferencias, por ejemplo, las teorías de utilidad ordinal que reemplazaron a las teorías de utilidad cardinal.

El axioma (iii) es la base de la racionalidad, el principio estructurador de la economía: en su versión de *monotonicidad*, es simplemente que se prefiere una lotería que da mayor probabilidad al premio mayor y menor al premio menor. Esto cubre, como caso especial, también que se prefiere un premio mayor a otro premio menor (sería el caso donde las probabilidades de cada premio son 1).

El axioma (v) de *comparabilidad* implica que las preferencias son completas y están definidas sobre todos los premios.

Eso nos deja con tres axiomas más. El axioma más específico de la teoría de utilidad esperado es el axioma (i), que es uno de los que más se han cuestionado. El axioma (iv) es tan básico que en general está implícito. El axioma (vi) de *continuidad* es un supuesto técnico de que siempre se puede encontrar una lotería que contiene el premio mayor y el premio menor que es justo indiferente a un premio monetario.

B. Aplicación de los axiomas para representar las loterías

Dado el carácter monetario de los premios, dado que existe una preferencia por más plata en lugar de menos por el axioma (iii) de *monotonicidad*, se cumple trivialmente el axioma (ii) de *transitividad* entre loterías. Lo mismo pasa con el axioma (v) de *comparabilidad* entre todas las loterías. Es decir, estos dos axiomas son redundantes en este caso de premios monetarios.

El axioma (vi) es el primero que tiene una consecuencia no trivial. Implica que si hay tres premios x_1, x_2, x_3, tal que se cumple $x_1 < x_2 < x_3$, entonces es posible encontrar una probabilidad ν tal que el individuo está indiferente entre el premio intermedio cierto y una lotería que consiste del premio menor y mayor:

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3).$$

Por el axioma (i) de *substitución*, si estamos indiferentes entre dos opciones *x* e *y*, también vamos a estar indiferentes entre dos loterías que sólo difieran en esas dos opciones, y si preferimos la opción *x* a *y*, vamos a preferir la lotería que contiene *x* a otra que contiene la opción *y* si no difiere en el resto de los resultados posibles. El *axioma de substitución* permite en particular reemplazar en una lotería x cualquier premio intermedio $x_i \in (x_1, x_3)$ por otro en términos de x_1 y x_3, ya que si el premio x_2 es indiferente a la lotería $(\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3)$, entonces

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim (p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3), p_3 \text{ de } x_3),$$

por lo que, sin pérdida de generalidad, todas las loterías se pueden reducir a loterías que solo constan del premio menor y mayor.[1]

El axioma (iv) de *invariancia a diferentes representaciones* cubre el axioma de *la reducción de loterías compuestas* usado en Davis y Holt. Por este axioma, una lotería compuesta de otras loterías se puede simplificar en términos de la probabilidad final de los distintos premios subyacentes. Para el caso recién descrito de la lotería x_2, tenemos que

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim ([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3),$$

ya que ambas tienen la mismas probabilidades de ganar los premios subyacentes.

Podemos simplificar aún más las probabilidades en esta lotería x usando las expresiones siguientes: $\pi_1 = [p_1 + p_2\nu]$, $\pi_3 = [p_2(1-\nu) + p_3] = 1 - \pi_1$. De vuelta, esto nos lleva a otra representación equivalente de la lotería original:

$$([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3) \sim (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3).$$

C. Representación con una función de utilidad esperada

[1] Por este axioma podemos ir en sentido inverso, que es el axioma de *cancelación*: si hay dos loterías que sólo difieren en los resultados de una de las opciones, mientras que los restantes opciones dan iguales resultados, podemos concentrarnos sólo en la opción que difiere, simplificando las loterías al eliminar aquellas alternativas que dan los mismos resultados. El axioma de *cancelación* se llama también axioma de *independencia* o axioma de *independencia de alternativas irrelevantes*, como hicieron von Neumann y Morgenstern.

Denotemos la utilidad de los premios mayor x_3 y menor x_1 por $U(x_3)$ y $U(x_1)$. Resulta que cualquier transformación lineal creciente va a representar el mismo ordenamiento de preferencias bajo incertidumbre si $a > 0$, $b \in R$:

$$U'(x) = aU(x) + b \quad \Rightarrow \quad U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow U'(x) \geq U'(y).$$

La prueba de que

$$\mathrm{E}[U(x)] \geq \mathrm{E}[U(y)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[U'(x)] \geq \mathrm{E}[U'(y)]$$

se sigue de aplicar las propiedades de transformaciones lineales crecientes,

$$\mathrm{E}[U'(x)] = a\,\mathrm{E}[U(x)] + b\,.$$ [2]

Dado que se pueden elegir arbitrariamente las constantes $a > 0$ y $b \in R$ en la representación de la utilidad, dado que cualquier transformación lineal creciente representa el mismo ordenamiento de alternativas en términos de utilidad esperada, si x_1 es el premio menor y x_3 es el mayor, se puede normalizar la función de utilidad de manera que $U'(x_1) = 0$, $U'(x_3) = 1$, para lo que se precisa:

$$a = \frac{1}{U(x_3) - U(x_1)}, \quad b = -\frac{U(x_1)}{U(x_3) - U(x_1)}\,.$$

Vamos a usar esta normalización en lo que sigue, que implica que

$$U'(x_1) = \frac{U(x_1) - U(x_1)}{U(x_3) - U(x_1)} = 0\,, \quad U'(x_3) = \frac{U(x_3) - U(x_1)}{U(x_3) - U(x_1)} = 1\,.$$

[2] Para conservar el mismo ordenamiento no se puede someter la utilidad esperada a cualquier transformación creciente, solo a una transformación *lineal* creciente. Esto se diferencia de la utilidad ordinal donde es válida cualquier transformación creciente (en un caso de dos bienes, solo interesa ahí el ordenamiento de menor a mayor de las sucesivas curvas de indiferencia, no cómo van variando la altura de una curva a la otra).

La utilidad esperada de la lotería compuesta x que analizábamos recién se puede expresar como:

$$\mathrm{E}[U'(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3)] = p_2(1-v) + p_3 = \pi_3 .$$

Pero entonces la utilidad esperada de la lotería compuesta $(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3)$ es igual a la probabilidad π_3 del premio mayor.

En conclusión, si las preferencias sobre loterías cumplen con los seis axiomas de von Neumann y Morgenstern, pueden ser representadas por esta función específica de utilidad esperada. Es decir, los axiomas de von Neumann y Morgenstern llevan a derivar una representación de las preferencias sobre loterías en términos de una función de utilidad esperada.

D. Uso del axioma de monotonicidad

Dada la representación de todas las loterías en términos del premio menor y mayor, podemos compararlas fácilmente. Por el axioma (iii) de *monotonicidad*, la lotería $x = (\pi_1 \text{ de } x_1, \pi_3 \text{ de } x_3)$ va a ser preferida a la lotería $y = (\pi_1' \text{ de } x_1, \pi_3' \text{ de } x_3)$ si tiene una mayor probabilidad del premio mayor, es decir, si

$$\pi_3 > \pi_3' .$$

Estas probabilidades del premio mayor son una representación de la utilidad de las loterías, como vimos.

E. Actitudes frente al riesgo y utilidad del ingreso

Davis y Holt, en su sección 2.4, tratan la maximización de la utilidad esperada y la aversión al riesgo.

La idea de concavidad de la función de utilidad, con una derivada segunda de la función de utilidad negativa, fue incorporada en la revolución marginalista de 1870 como utilidad marginal decreciente de un bien y luego como utilidad marginal decreciente del ingreso (esto último llevó a argumentos para la redistribución del ingreso). Estas discusiones fueron abandonadas cuando el enfoque cardinal de la utilidad fue reemplazado alrededor de 1930 por el enfoque ordinal de la utilidad ya que niveles absolutos de utilidad son puramente arbitrarios, además de que no se permiten hacer comparaciones interpersonales de utilidad.

La idea más amplia de utilidad esperada tuvo que esperar otros tres cuartos de siglo para ser incorporada a la economía, lo que sucede a partir de la obra de 1944 de von Neumann y Morgenstern sobre teoría de juegos. La utilidad propuesta por Bernoulli fue axiomatizada por von Neumann y Morgenstern, por lo que la teoría de utilidad esperada se suele llamar utilidad de von Neumann y Morgenstern. Tiene ciertas de las propiedades de la utilidad cardinal, como por ejemplo una derivada segunda con un signo definido. El signo de esta derivada segunda puede ser nulo (indiferencia al riesgo), negativo (aversión al riesgo) o positivo (propensión al riesgo).

La diferencia con la utilidad cardinal es que no hay comparabilidad interpersonal de utilidades, ya que cada escala es arbitraria dado que cualquier transformación lineal creciente también es una representación de las mismas preferencias.

Indiferencia al riesgo

El valor esperado y la utilidad esperada de una lotería llevan a resultados similares cuando hay indiferencia al riesgo. El caso de indiferencia al riesgo se puede representar por una utilidad lineal en el ingreso:

$$U(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[x].$$

Es decir, si una lotería tiene mayor valor esperada que otra, una persona indiferente al riesgo va a preferir la lotería con mayor valor esperado. Por tanto, maximizar la utilidad es lo mismo que maximizar el valor esperado. Uno puede esperar que las preferencias van a ser lineales para apuestas “chicas”.

Volviendo a lo que hicimos más arriba, cuando usamos el axioma de continuidad, el premio x_2 que era justo indiferente a la lotería del premio mayor y menor,

$$x_2 \sim (\nu \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3),$$

es en este caso tal que

$$x_2 = \nu\, x_1 + (1-\nu)\, x_3.$$

Es decir, las probabilidades ν y $(1-\nu)$ son determinadas de forma actuarialmente justas.

Aversión al riesgo

El ranking según valor esperado y utilidad esperada pueden diferir una vez que hay aversión o propensión al riesgo. Con aversión al riesgo, una consecuencia es que la utilidad esperada de un premio va a ser menor que la utilidad de la esperanza del premio (que es medio un trabalenguas). Es decir, el valor esperado de la lotería que se exige para aceptar el riesgo va ser mayor que el premio cierto x_2 :

$$x_2 < \nu^A\, x_1 + (1-\nu^A)\, x_3,$$

donde se cumple que $\nu^A < \nu$, es decir, la probabilidad del premio menor va a ser menor que la probabilidad actuarialmente justa.

Propensión al riesgo

Se cumple aquí que el premio cierto que resulta indiferente a la lotería tiene un valor mayor que el valor esperado de la lotería:

$$x_2 > \nu^P \; x_1 + (1 - \nu^P) \; x_3 \,,$$

donde se cumple que $\nu^P > \nu$, es decir, la probabilidad del premio menor es mayor a la probabilidad actuarialmente justa.

Descripción de conductas que pueden ser tanto cuidadosas como riesgosas

Si la utilidad es cóncava y tiene derivada segunda negativa, va a implicar aversión al riesgo (ese es el caso de la función logarítmica usada por Bernoulli). En cambio, en caso de propensión al riesgo, se puede representar por funciones convexas.

Como no siempre evitamos las apuestas, Friedman y Savage critican la formulación de Bernoulli de utilidad marginal del ingreso siempre decreciente en un artítulo de 1948, planteando en cambio una función de utilidad con un segmento convexo (con preferencia al riesgo) y otro cóncavo (con aversión al riesgo).

Si la función de utilidad está acotada abajo y arriba, una consecuencia que plantean Blackwell y Girshick en 1954 es que la utilidad primero va a tener un tramo convexo y luego un segmento cóncavo. Un ejemplo de esa forma de curva es la curva logística.