Historia del pensamiento económico **Jorge M. Streb**

Clase 13 **30 octubre 2009**

Temas

1. Teoría de la utilidad esperada
2. Experimento de mercado: demanda, oferta y eficiencia

Desarrollo

1. Teoría de la utilidad esperada

Para explicar la violación del axioma de cancelación o substitución, hay que hacer una breve exposición de la teoría de utilidad esperada.

Estas notas se apoyan en el capítulo 2 de Davis y Holt, que presenta una discusión informal de este tema. También hay unas notas en la web, en el sitio de "History of economic thought website" http://homepage.newschool.edu/het//home.htm, en el ensayo sobre "Uncertainy, information and games".

A. Paradoja de San Petesburgo

Davis y Holt, en su sección 2.4, tratan la maximización de la utilidad esperada y la aversión al riesgo.

Históricamente, el tema aparece a principios del siglo XVIII con Daniel Bernoulli, que resuelve en 1738 la paradoja de San Petesburgo propuesta en 1713 por Nicolás Bernoulli, otro matemático (y primo suyo). Esta lotería da un premio de 2 rublos con probabilidad ½, de 4 rublos con probabilidad de ¼, etc., o sea, hay premios de 2^n rublos con probabilidad $(1/2)^n$, para $n = 1,2,3,...$, por lo que la suma (el valor esperado) es infinita. Sin embargo, nadie estaba dispuesto a pagar mucho por esta lotería.

La clave de la solución es que no se puede explicar el comportamiento respecto a esta lotería por su valor esperado, que es infinito. Lo que propone Bernoulli es que a los individuos no les interesa el premio x, sino la utilidad del premio $U(x)$.

Si la distribución de probabilidad es discreta, mientras que el valor esperado está dado por

$$\mathrm{E}[x] = \sum px_i \ ,$$

la utilidad esperada está dada por:

$$\mathrm{E}[U(x)] = \sum p_i U(x_i) \ .$$

Bernoulli propuso en particular una utilidad logarítmica, que es cóncava y lleva a una utilidad marginal decreciente del ingreso:

$$U(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[\ln x] \ .$$

Como demostró Bernoulli para el caso de la paradoja de San Petesburgo, el individuo no va a estar dispuesto apostar mucho en este caso. Sin embargo, la función de utilidad logarítmica no alcanza para explicar por qué no se acepta apostar mucho por otras loterías que tienen también un valor esperado infinito, por ejemplo, ganar 2 pesos con probabilidad ½ o ganar 2^n pesos con probabilidad ½. Para eso hace falta introducir una característica adicional, que la función de utilidad es acotada, a lo que volvemos enseguida.

B. Actitudes frente al riesgo y utilidad del ingreso

La idea de concavidad de la función de utilidad, con derivada segunda de la función de utilidad negativa, fue incorporada en la revolución marginalista de 1870 como utilidad marginal decreciente. Pero la idea más amplia de utilidad esperada tuvo que esperar otros tres cuartos de siglo para ser incorporada a la economía, lo que sucede a partir de la obra de 1944 de von Neumann y Morgenstern sobre teoría de juegos.

La utilidad propuesta por Bernoulli y axiomatizada por von Neumann y Morgenstern (por lo que la teoría de utilidad esperada se suele llamar utilidad de von Neumann y Morgenstern) tiene ciertas de las propiedades de la utilidad cardinal, como por ejemplo una derivada segunda con un signo definido. El signo de esta derivada segunda puede ser nulo (indiferencia al riesgo), negativo (aversión al riesgo) o positivo (propensión al riesgo).

El valor esperado y la utilidad esperada de una lotería llevan a resultados similares cuando hay indiferencia al riesgo. El caso de indiferencia al riesgo se puede representar por una utilidad lineal en el ingreso:

$$U(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[U(x)] = \mathrm{E}[x].$$

Es decir, si una lotería tiene mayor valor esperada que otra, una persona indiferente al riesgo va a preferir la lotería con mayor valor esperado. Por tanto, maximizar la utilidad es lo mismo que maximizar el valor esperado. Uno puede esperar que las preferencias van a ser lineales para apuestas “chicas”.

Si la utilidad es cóncava y tiene derivada segunda negativa, va a implicar aversión al riesgo. Una consecuencia es que la utilidad de un premio va a ser menor que la utilidad de la esperanza del premio. El ranking según valor esperado y utilidad esperada pueden diferir una vez que haya aversión al riesgo.

Como no siempre evitamos las apuestas, Friedman y Savage critican la formulación de Bernoulli de utilidad marginal del ingreso decreciente en un artítulo de 1948, planteando en cambio una función de utilidad con un segmento convexo (con preferencia al riesgo) y otro cóncavo (con aversión al riesgo).

Si la función de utilidad está acotada abajo y arriba, una consecuencia que plantean Blackwell y Girshick en 1954 es que la utilidad primero va a tener un tramo convexo y luego un segmento cóncavo. Un ejemplo de esa forma de curva es la curva logística.

C. Transformaciones lineales crecientes

Cualquier transformación lineal creciente de la utilidad de von Neumann y Morgenstern va a representar las mismas preferencias bajo certidumbre, con $a > 0$, $b \in R$:

$$U'(x) = aU(x) + b \quad \Rightarrow \quad U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow U'(x) \geq U'(y) .$$

Además, estas transformaciones también conservan el mismo ordenamiento bajo incertidumbre:

$$\mathrm{E}[U(x)] \geq \mathrm{E}[U(y)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[U'(x)] \geq \mathrm{E}[U'(y)] .$$

No se puede someter a la utilidad esperada a cualquier transformación creciente, sino tiene que ser una transformación lineal creciente, donde se puede multiplicar la utilidad por un factor positivo y sumar una constante que puede ser negativa. Esto se diferencia de la utilidad ordinal donde es válida cualquier transformación creciente.

Dado que se pueden elegir arbitrariamente las constantes $a > 0$, $b \in R$ en la representación de la utilidad (ya que cualquier transformación lineal creciente representa el mismo ordenamiento de alternativas), si x_1 es el menor premio y x_3 es el mayor, se puede normalizar la función de utilidad de manera que $U'(x_1) = 0$, $U'(x_3) = 1$, para lo que se precisa:

$$a = \frac{1}{U(x_3) - U(x_1)}, \quad b = -\frac{U(x_1)}{U(x_3) - U(x_1)} .$$

Vamos a usar esta normalización en lo que sigue.

D. Derivación de la utilidad esperada usando los axiomas de von Neumann y Morgenstern

Lo que mostraron von Neumann y Morgenstern es que la utilidad esperada se podía derivar de una serie de axiomas simples. Vamos a seguir básicamente la discusión en el apéndice 3 del capítulo 2 de Davis y Holt sobre este tema, donde usan los mismos seis axiomas que Tversky y Kahneman mencionan. Lo que llaman el *axioma de substitución* es el *axioma de cancelación* en Tversky y Kahneman, y el *axioma de reducción de loterías compuestas* es un caso específico del *axioma de invariancia* de Tversky y Kahneman.

Dado el carácter monetario de los premios, y la preferencia por más plata en lugar de menos, se cumplen trivialmente el *axioma de transitividad* y el *de comparabilidad*, por el que las preferencias son completas y están definidas sobre todos los premios.

El *axioma de continuidad* implica que si hay tres premios x_1, x_2, x_3, tal que se cumple $x_1 < x_2 < x_3$, entonces es posible encontrar una probabilidad ν tal que el individuo está indiferente entre el premio intermedio y una lotería que consiste del premio menor y mayor:

$$x_2 \sim (\upsilon \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3)$$

Por el *axioma de substitución*, si estamos indiferentes entre dos opciones *x* e *y*, también vamos a estar indiferentes entre dos loterías que sólo difieran en esas dos opciones, y si preferimos la opción *x* a *y*, vamos a preferir la lotería que contiene *x* a otra que contiene la opción *y* y que no difiere en el resto de los resultados posibles:

$$x \stackrel{\sim}{\succ} y \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 \text{ de } x_1,\, p_2 \text{ de } x,\, p_3 \text{ de } x_3) \stackrel{\sim}{\succ} (p_1 \text{ de } x_1,\, p_2 \text{ de } y,\, p_3 \text{ de } x_3)$$

El *axioma de substitución* se llama también el *axioma de cancelación* (*o de independencia, o de independencia de alternativas irrelevantes* de von Neumann y Morgenstern), ya que por este axioma podemos ir en sentido inverso y simplificar las loterías, eliminando aquellas alternativas que dan los mismos resultados.

El *axioma de substitución* permiten reemplazar en las loterías cualquier premio intermedio $x_i \in (x_1, x_3)$ por una lotería en términos de x_1 y x_3, ya que si el premio x_2 es indiferente a la lotería $(\upsilon \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3)$, entonces

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim (p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } (\upsilon \text{ de } x_1, (1-\nu) \text{ de } x_3), p_3 \text{ de } x_3),$$

así que, sin pérdida de generalidad, todas las loterías se pueden reducir a loterías que solo constan del premio menor y mayor.

Por el *axioma de invariancia* a diferentes representaciones, una lotería compuesta de otras loterías se puede simplificar, ya que lo que importa es la probabilidad final de los distintos premios subyacentes. Esto cubre el *axioma de reducción de loterías compuestas* en Davis y Holt. Para el caso recién descrito, tenemos que

$$(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3) \sim ([p_1 + p_2\nu] \text{ de } x_1, [p_2(1-\nu) + p_3] \text{ de } x_3).$$

Con la normalización $U(x_1) = 0$, $U(x_3) = 1$, la utilidad esperada es:

$$\mathrm{E}[U(p_1 \text{ de } x_1, p_2 \text{ de } x_2, p_3 \text{ de } x_3)] = p_2(1-\nu) + p_3.$$

Para el caso de la lotería compuesta que analizábamos, la utilidad esperada es por tnato igual a la probabilidad del premio mayor. En consecuencia, las preferencias sobre loterías pueden ser representadas por la función de utilidad esperada.

Finalmente, se agrega el *axioma de monotonicidad*, por el que la lotería $x = (q \text{ de } x_1, (1-q) \text{ de } x_3)$ va a ser preferida a la lotería $y = (r \text{ de } x_1, (1-r) \text{ de } x_3)$ si tiene una mayor probabilidad del premio mayor, es decir, si

$$1 - q > 1 - r.$$

Este supuesto o restricción adicional tiene que ver con el principio de racionalidad que es ubicuo en economía, siendo útil a nivel de contrastación empírica de la teoría. Usando la normalización $U(x_1)=0$, $U(x_3)=1$, se tiene que la utilidad de estas loterías está dada por:

$$\mathrm{E}[U(x)] = qU(x_1) + (1-q)U(x_3) = 1-q,$$
$$\mathrm{E}[U(y)] = rU(x_1) + (1-r)U(x_3) = 1-r.$$

Por tanto, una lotería x con una mayor probabilidad que la lotería y de llegar al premio mayor va a ser preferida. Al mismo tiempo, va a ser asignada un número mayor por la función de utilidad esperada, que en nuestra normalización es la probabilidad del premio mayor.

E. Violaciones de los axiomas de von Neumann y Morgenstern en los problemas de Tversky y Kahneman

Cuando se comparan los problemas 10 y 11 en Tversky y Kahneman, se trata de las mismas probabilidades finales sobre premios, por lo que por *invariancia* tenemos que las opciones F en 11 y D en 10 tienen que ser indiferentes:

$$(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } (0{,}80 \text{ de } 45,\ 0{,}20 \text{ de } 0)) \text{ indiferente } (0{,}80 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}20 \text{ de } 45).$$

Sin embargo, en clase se prefirió en 7 de 19 casos a $\text{E}=(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } 30)$ sobre $\text{F}=(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } (0{,}80 \text{ de } 45,\ 0{,}20 \text{ de } 0))$, mientras que en sólo 1 de 19 casos se prefirió a $\text{C}=(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } 30)$ sobre $\text{D}=(0{,}80 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}20 \text{ de } 45)$. Esto implica decisiones inconsistentes con la teoría de utilidad esperada, ilustrando el punto de Tversky y Kahneman de que diferentes representaciones nos pueden llevar a diferentes decisiones. Es lo que llaman el “efecto seudo-certidumbre” en el problema 11 (porque en la segunda etapa una de las opciones no implica riesgo).

Respecto a su representación por utilidad esperada, tenemos que las opciones D y F implican una utilidad esperada de

$$\mathrm{E}[U(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } (0{,}80 \text{ de } 45,\ 0{,}20 \text{ de } 0)] = 0{,}80U(0) + 0{,}20U(45).$$

En tanto, las opciones C y E implican una utilidad esperada de

$$\mathrm{E}[U(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } 30] = 0{,}75U(0) + 0{,}25U(30).$$

Trabajando con la representación de utilidad esperada, si D es preferida a C,

$$0{,}80U(0) + 0{,}20U(45) > 0{,}75U(0) + 0{,}25U(30) \quad \Rightarrow \quad 0{,}20U(0) + 0{,}80U(45) > U(30).$$

Pero en el problema 9, aquellos que cambiaron a preferir 30 con certeza a la lotería que daba 45 con una probabilidad del 80% no hicieron lo que haría un decisor con preferencia a la von Neumann-Morgenstern. Esto es el llamado “efecto certeza” que introdujo Allais con su paradoja.

La manera en que lo discuten Tversky y Kahneman es como una violación del *axioma de substitución o cancelación*: si en la representación en dos etapas de los problemas 10 y 11 eliminamos el 75% de casos donde no hay ningún premio, nos quedamos con el formato del problema 9:

$$\begin{aligned}&(0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } 30) \succ (0{,}75 \text{ de } 0\ ;\ 0{,}25 \text{ de } (0{,}80 \text{ de } 45,\ 0{,}20 \text{ de } 0)\\ &\Leftrightarrow (1 \text{ de } 30) \succ (0{,}80 \text{ de } 45,\ 0{,}20 \text{ de } 0).\end{aligned}$$

En resumen, la comparación de las respuestas a los problemas 10 y 11 muestran que se viola el *axioma de invariancia a la representación*, que es lo más básico que uno espera de un decisor racional (si es el mismo problema, la descripción no tendría que cambiar la respuesta). La comparación de los problemas 9 y 10 es como fue presentado por vez primera por Allais en 1953 el asunto de decisiones inconsistentes con la teoría de utilidad esperada, e implica específicamente una violación del *axioma de substitución o cancelación*.

2. Experimento de mercado: demanda, oferta y eficiencia

Esto es una aclaración puntual respecto a la discusión del experimento de mercado la clase pasada.

Para entender bien el experimento de mercado ideado por Vernon Smith para testear el modelo de competencia perfecta, hay que entender como se pueden derivar las curvas de oferta y demanda del gráfico 1.2 de las valuaciones individuales en el cuadro 1.1 del capítulo 1 de Davis y Holt.

En el cuadro 1.2, ellos luego contrastan las predicciones de diferentes modelos para estos mismos valores de parámetros.