Una nota sobre juego reputacional en capítulo sobre liderazgo en Shepsle y Bonchek

Este es un juego de señales, ya que seguidores observan acción (castigar o no rebelión), pero no el tipo (fuerte o débil) del líder. Los seguidores parten de ciertas expectativas a priori sobre la distribución de tipos, por lo que es juego Bayesiano y el concepto de equilibrio es equilibrio bayesiano perfecto.

Los equilibrios en estrategias puras pueden ser agrupadores (ambos tipos de gobierno aplican castigo a rebelión en primer período), o pueden ser con diferenciación.

Equilibrio agrupador: si ambos gobiernos aplican castigo a rebelión en primer período, la información que va a tener el seguidor en el segundo período es la misma que al inicio: con probabilidad 1-ω es de tipo fuerte y con probabilidad ω es de tipo débil.

Por tanto, seguidor no se va a querer rebelar en el segundo período si

$(1-\omega)(b-1)+\omega b<0$, es decir, si $b<1-\omega$. (1)

Esto implica que si reputación inicial es muy fuerte, no hay incentivo para rebelarse en el segundo período si se mantiene esa reputación.

Dado eso, el gobierno débil va a tener un incentivo a castigar en el primer período, ya que si todos castigan se mantiene reputación inicial: si bien pierde 1 en el primer período si efectivamente tiene que castigar, como no hay rebelión en el segundo período, espera ganar *a* en el segundo, y dados nuestros supuestos la ganancia completa en ambos períodos es

$-1+a>0$. (2)

Es decir, si aplica castigo, no va a haber rebelión en el siguiente período (si no aplica castigo, en cambio, va a recibir 0 tanto en primer como en segundo período, ya que en segundo período el seguidor se va a rebelar con probabilidad 1).

Por último, seguidor en primer período, si se rebela, espera un castigo cierto en el primer período, lo que implica que su pago esperado es:

$(1-\omega)(b-1)+\omega(b-1)=(b-1)<0$. (3)

Es decir, su pago esperado es siempre negativo.

Por tanto, es un equilibrio agrupador si se cumple (1), por lo que nadie se rebela ni en el primer período ni en el segundo, y si alguien se rebela en el primer período, ambos tipos de gobierno aplican un castigo.

¿Qué sucede si no se cumple la condición (1)? Siempre se va a rebelar el seguidor en el período 2, por lo que no tiene sentido en ese caso que un gobierno débil aplique una política de castigo en el primero. Por tanto, sólo hay equilibrios agrupadores cuando se cumple la condición (1).

Equilibrio con diferenciación. Nos preguntamos ahora si es posible un equilibrio con diferenciación cuando no se cumple la condición (1).

La respuesta es no: si fuera así, entonces sólo los gobiernos fuertes castigarían en el primer período. Esto implica que con probabilidad 1 que estos gobiernos van a castigar en el período 2, por lo que ningún seguidor que observa castigo va a querer rebelarse en el segundo período. Pero esto mismo haría que los gobiernos débiles quisieran también castigar, para evitar rebelión en segundo período. Esta tentación destruye cualquier equilibrio con diferenciación.

Equilibrio con diferenciación parcial. La idea no es que Uds. estudien este equilibrio en detalle, ya que el curso se concentra en los equilibrios bayesianos prefectos en estrategias puras. Igual, les doy los lineamientos generales de este caso particular.

Queda como alternativa que el gobierno débil aplique una estrategia mixta, por lo que con cierta probabilidad castiga o no. Si fuera así, hay una probabilidad de castigo del tipo débil, llamémosla m, suficientemente baja que hace que el seguidor esté indiferente entre rebelarse o no en el segundo período si observó un castigo en el primer período.

Esto lleva a modificar la ecuación (1), ya que ahora tiene que decidir el seguidor en segundo período dependiendo de la historia, después de observar castigo o no observarlo. Si no observa castigo ante rebelión en período 1, seguidor en período 2 sabe que líder es débil y no va a castigar, por lo que se rebela seguro. Si observó castigo, va a estar indiferente entre rebelarse o no si se cumple que:

$$(1-\omega)(b-1)+\omega\, m\, b = 0\ . \qquad (4)$$

Despejando, esto implica que la estrategia mixta m es decreciente en b:

$$m = [(1-\omega)/\omega](1-b),$$

yendo desde $1-\omega$ cuando $b=1-\omega$, hasta 0 cuando $b=1$. Es decir, cuanto mayor la ventaja de rebelarse, menor va a poder ser la posibilidad de evitar rebelión en segundo período.

Dado eso, hay una probabilidad de no rebelarse en segundo período, llamémosla p, que va a dejar al tipo débil indiferente entre castigar o no. Esto es variante de ecuación (2), introduciendo estrategia mixta p e igualando expresión a cero:

$$-1+\ a\, p = 0. \qquad (5)$$

Despejando, tenemos que se necesita $p = 1/a$.

En cuanto al primer período, dado que hay cierta probabilidad de castigo *m* si se rebela, el seguidor tiene que ver si le conviene rebelarse o no en ese período. Hay que modificar la ecuación (3), y el seguidor va a estar indiferente entre rebelarse o no si

$$(1-\omega)(b-1)+\omega m^i(b-1)+ \omega m^i b=0 \ . \qquad (6)$$

Despejando, esto implica que la estrategia mixta m^i que deja indiferente al seguidor en el primer período es una función creciente de *b*:

$$m^i=[b-(1-\omega)]/\omega,$$

que va desde 0 cuando $b=1-\omega$, hasta 1 cuando $b=1$. Dado que la *m* efectiva está dada por la ecuación (4), para $m^i < m$ no hay rebelión. Pero a medida que aumenta la ventaja de rebelarse, dado por el parámetro *b*, eventualmente llega un punto donde todos los seguidores se rebelan en el período 1, ya que $m^i > m$. Sólo hay un único valor de *b* donde el seguidor está indiferente entre rebelarse o no en el primer período.

Dadas esas probabilidades, hay un equilibrio híbrido donde el líder y el seguidor del período dos aplican estrategias mixtas. El seguidor del período uno o nunca se rebela (si *b* es bajo), o siempre se rebela (si *b* es alto).

Jorge M. Streb