Crecimiento economico
Modelos de generaciones sobrepuestos
Introduccion

Prof. McCandless
UCEMA

Abril 2009

Modelo donde ahorro es un variable de decision

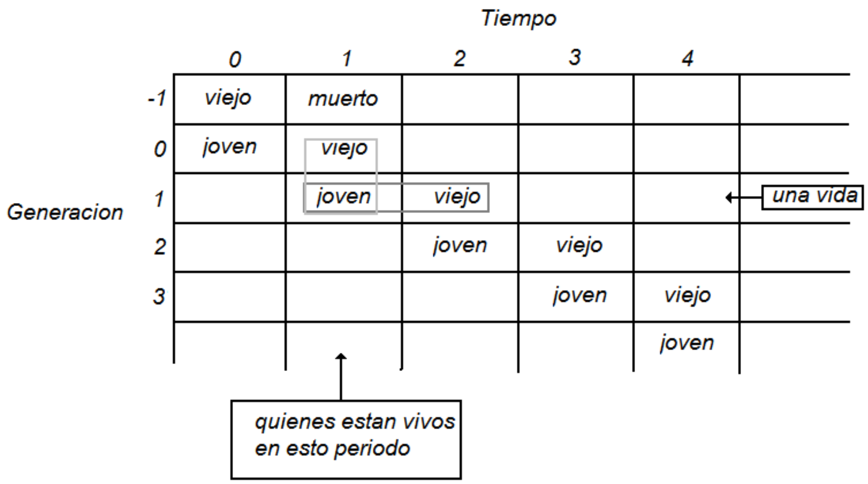
- Agentes deciden cuanto quieren ahorrar
- Depende en lo que tienen
- Hacen con expectativas sobre el futuro
  - En version mas simple:saben la futuro
  - Sus expectativas son lo que va a pasar
- Prevision perfecta hace mas simple el modelo
- Mas tarde podemos pensar en versiones estocastico

Modelo de generaciones sobrepuestas

- Modelo dinamico
- Agentes viven 2 periodos
- Horizonte de la economía es infinito
  - Horizonte de cada persona es dos periodos
- No hay periodo final
  - hay problemas cuando hay periodo final
  - Comportamiento cambia si el mundo termina manana

Modelo OLG (overlapping generations)

- Tiempo: tiempo es discrete



- Periodo numerados $0, 1, 2, 3, ...$
  - periodo 0 es historia
- $N(t)$ personas nacen cada periodo
- Gente viven 2 periods (miembros de generación t viven en period t y $t = 1$)
  - En periodo t, son joven
  - En periodo $t + 1$, son viejo
  - En periodo $t + 2$, estan muertos
- En periodo t hay $N(t) + N(t - 1)$ personas vivos
  - $N(t)$ jovenes y $N(t - 1)$ viejos

Modelo OLG: mapa
Modelo OLG

- Preferencias: los jovenes maximizan

$$u_t^h = u\left(c_t^h\left(t\right), c_t^h\left(t+1\right)\right)$$

- los viejos maximizan

$$c_t^h\left(t+1\right)$$

- Consumo total

$$C\left(t\right) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_t^h\left(t\right) + \sum_{i=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h\left(t\right)$$

- Nota: $C_t(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_t^h(t)$ y $C_t(t+1) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_t^h(t+1)$

Modelo OLG: Factible

- Consumo de persona h de generacion t es $c_t^h = \left[c_t^h(t), c_t^h(t+1)\right]$
- Recursos disponibles $= Y(t)$ (de bienes no almacenables)
- Sendero de consumo es *factible* si

$$Y(t) \geq C(t), \forall t$$

Asignaciones

- *Asignaciones*: cantidades de c_t^h $\forall h$ y $\forall t$
  - Una asignacion en para todo las agentes para todos los periodos
- Asignaciones debe ser *factible*
- Una asignacion eficiente
  - Una asignación es *eficiente* si

$$Y(t) = C(t), \forall t$$

Superior de Pareto

- Considera dos asignaciones A y B. A es superior de Pareto a B si alguien tiene una utilidad mas alta y nadie tiene una mas baja comparado a B.
- Ejemplos: $A = [1,3]$, $B = [3,1]$, $C = [2,2]$ y $u\left(c_t^h(t), c_t^h(t+1)\right) = c_t^h(t) \cdot c_t^h(t+1)$
  - Para los jovenes: A da $u = 3$, B da $u = 3$, y C da $u = 4$.
  - Para los viejos: A da 3, B da 1, y C da 2
  - Entonces: A es SdeP a B, C es SdeP a B, A es Pareto no-comparable a C

Economia con derechos de propridad privado

- Cada joven tiene una dotación durante la vida de

$$w_t^h = \left[w_t^h(t), w_t^h(t+1)\right]$$

- Bien de periodo t so puede consumirlo solo en periodo t
- Nota:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} w_t^h(t) + \sum_{i=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t)$$

Mercado de prestamos

- Hay posibilidades para tomando prestamos y prestando
- $l^h(t)$ son prestamos de persona h en en periodo t (es negativo si esta tomando prestamos)
- va a recibir $r(t)l^h(t)$ en periodo $t+1$
- solo los miembros de generación t pueden tomar prestamos o prestar en periodo t
  - ¿por qué?
- $r(t)$ es la tasa de interés bruta y real

Restricciones de presupuesto

- de los jovenes de generación t

$$c_t^h(t) \leq w_t^h(t) - l^h(t)$$

- de los viejos de generación t

$$c_t^h(t+1) \leq w_t^h(t+1) + r(t)\, l^h(t+1)$$

- restricción de presupuesto de la vida

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} \leq w_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1)}{r(t)}$$

- Valor presente de consumo de vida iguala a el valor presente de dotacion de vida

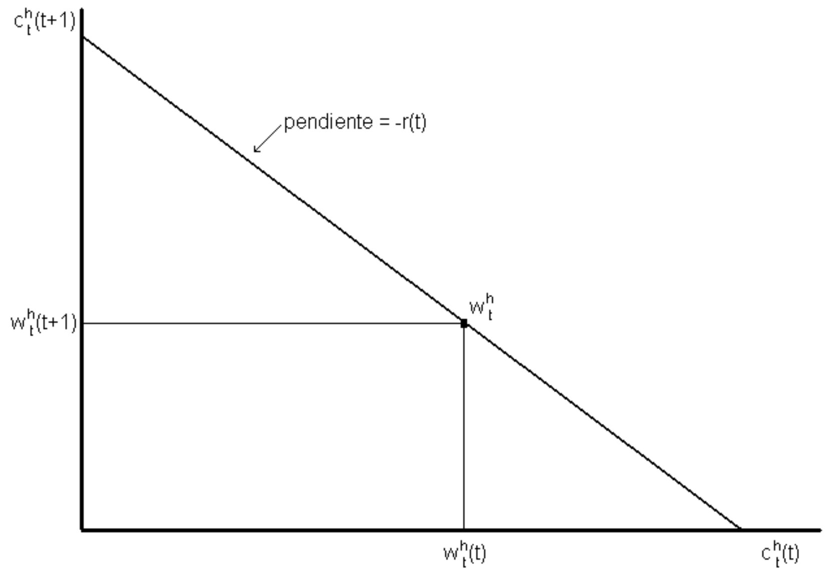
Restricciones de presupuesto
Problema economico

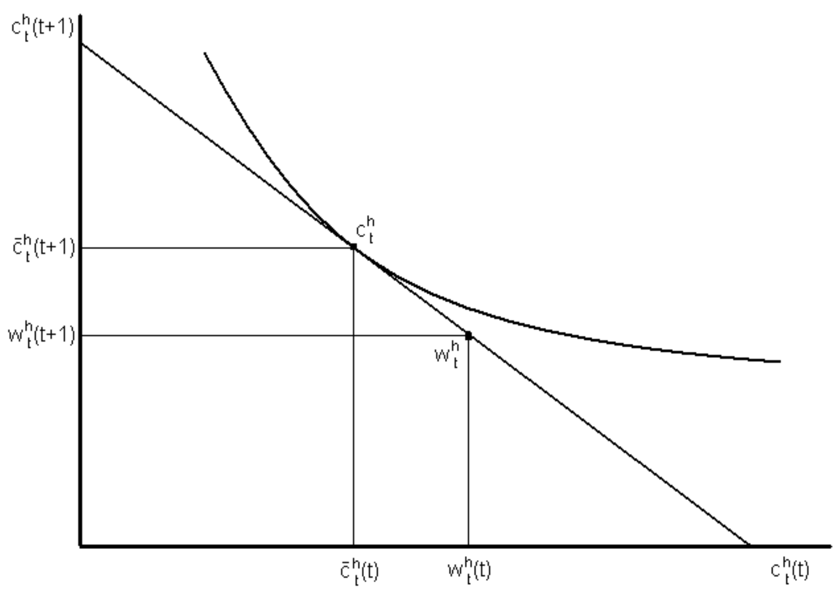
- Maximizar

$$u_t^h = u\left(c_t^h(t), c_t^h(t+1)\right)$$

  surjeto a la restricion de presupuesto

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} \leq w_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1)}{r(t)}$$


$c_t^h(t+1)$
pendiente = -r(t)
w_t^h
$w_t^h(t+1)$
$w_t^h(t)$
$c_t^h(t)$


$c_t^h(t+1)$
c_t^h
$\bar{c}_t^h(t+1)$
$w_t^h(t+1)$
w_t^h
$\bar{c}_t^h(t)$
$w_t^h(t)$
$c_t^h(t)$

Problema economico
Ejemplo

$$u\left(c_t^h(t), c_t^h(t+1)\right) = c_t^h(t) \cdot c_t^h(t+1)^{\beta}$$

Definición: Ahorros = $a^h(t) = w_t^h(t) - c_t^h(t)$
Restricción de presupuesto es (con igualdad)

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} = w_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1)}{r(t)}$$

Encuentre la función de ahorro (en terminos de dotaciones, $w_t^h(t)$ y $w_t^h(t+1)$, y la tasa de interés, $r(t)$.
Ejemplo

- Como hacer: escribir restricción de presupuesto como

$$c_t^h(t+1) = w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) - c_t^h(t)\, r(t)$$

- sustitucion:

$$c_t^h(t) \cdot \left(w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) - c_t^h(t)\, r(t)\right)^{\beta}$$

Ejemplo

- Toma derivada con $c_t^h(t)$
- condición de primero orden es

$$\begin{aligned} 0 &= \left(w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) - c_t^h(t)\, r(t)\right)^{\beta} \\ &\quad -\beta c_t^h(t) \cdot \left(w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) - c_t^h(t)\, r(t)\right)^{\beta-1} r(t) \end{aligned}$$

- o

$$w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) - c_t^h(t)\, r(t) = \beta c_t^h(t) \cdot r(t)$$

- o

$$w_t^h(t)\, r(t) + w_t^h(t+1) = (1+\beta)\, r(t)\, c_t^h(t)$$

- o

$$c_t^h(t) = \frac{w_t^h(t)}{(1+\beta)} + \frac{w_t^h(t+1)}{(1+\beta)\, r(t)}$$

Función de Ahorro

- Solo los jovenes ahorran:

$$a^h(t) = w_t^h(t) - c_t^h(t)$$

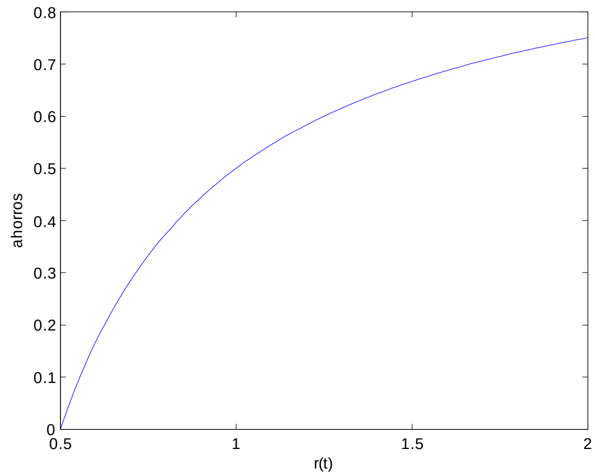


Figure 1: Funciòn de ahorro de un individual

- Replace de arriba:

$$a^h(t) = w_t^h(t) - \left(\frac{w_t^h(t)}{(1+\beta)} + \frac{w_t^h(t+1)}{(1+\beta)\, r(t)} \right)$$

- $$a^h(r(t)) = \frac{\beta w_t^h(t)}{(1+\beta)} - \frac{w_t^h(t+1)}{(1+\beta)\, r(t)}$$

- Con $\beta = 1$, $w_t^h = [2, 1]$,

$$a^h(r(t)) = 1 - \frac{1}{2r(t)}$$

Función de Ahorro
Ahorro agregado

- Ahorro agregado $= S(t)$

$$S(t) = S(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} a^h(r(t))$$

- Si todos los individuos de generación t son identicos

$$S(r(t)) = N(t)a^h(r(t))$$

- Si $N(t) = 100$, y

$$a^h(r(t)) = 1 - \frac{1}{2r(t)},$$

$$S(r(t)) = 100 - \frac{50}{r(t)}$$

.Condicion de equilibrio en economia con prestamos privados

- Restricción de presupuesto de los jovenes

$$c_t^h(t) = w_t^h(t) - l^h(t)$$

- o (dado definición de ahorros)

$$l^h(t) = w_t^h(t) - c_t^h(t) = a^h(r(t))$$

- Prestamos agregado de los jovenes son iguales a

$$\sum_{h=1}^{N(t)} l^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} a^h(r(t)) = S(r(t))$$

.Condicion de equilibrio en economia con prestamos privados

- Dado que los jovenes solo pueden (o quieren) prestar a otro jovenes

$$\sum_{h=1}^{N(t)} l^h(t) = 0$$

- Condiciòn de equilibrio (en esta economia)

$$S(r(t)) = 0$$

- Con $N(t) = 100$, y todos los jovenes igual con $a^h(r(t)) = 1 - \frac{1}{2r(t)}$ tasa de interés en equilibrio es

$$100 - \frac{50}{r(t)} = 0$$

o

$$r(t) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

.Equilibrio en economia mas interesante

- Los jovenes pares ($h = 2, 4, 6, ..., 100$) tienen dotaciones de $[2, 1]$
- Los jovenes impares ($h = 1, 3, 5, ..., 99$) tienen dotaciones de $[1, 2]$

- Todos con $\beta = 1$ y una funcion de ahorro

$$a^h\left(r\left(t\right)\right) = \frac{\beta w_t^h\left(t\right)}{\left(1+\beta\right)} - \frac{w_t^h\left(t+1\right)}{\left(1+\beta\right)r\left(t\right)}$$

- Ahorro agregado de los pares

$$S\left(pares\right) = 50\left[1 - \frac{1}{2r\left(t\right)}\right] = 50 - \frac{25}{r\left(t\right)}$$

- Ahorro agregado de los impares

$$S\left(impares\right) = 50\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{r\left(t\right)}\right] = 25 - \frac{50}{r\left(t\right)}$$

- Ahorro agregado (total)

$$S\left(r(t)\right) = 50 - \frac{25}{r\left(t\right)} + 25 - \frac{50}{r\left(t\right)} = 75 - \frac{75}{r\left(t\right)}$$

Equilibrio en economia mas interesante

- Condicion de equilibrio en economia con prestamos privados

$$S\left(r(t)\right) = 0$$

- en esta caso,

$$S\left(r(t)\right) = 75 - \frac{75}{r\left(t\right)} = 0$$

- o

$$r\left(t\right) = 1$$

- Cada joven par ahorra

$$a(pares) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

- Cada joven impar ahorra (pide prestar)

$$a(impares) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

Agregando un Gobierno

- Características de un gobierno
  - cobra impuestos (tipo suma fija)
  - hace trasferencias

- emita bonos

- Impuestos y trasferencias
- definir impuestos t_t^h como

$$t_t^h = \left[t_t^h(t), t_t^h(t+1)\right]$$

- Restricciòn de presupuesto del gobierno

$$\sum_{h=1}^{N(t)} t_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} t_{t-1}^h(t) = 0$$

Impuestos y trasferencias

- Dotacion de los individuales despues impuestos y trasferencias

$$w_t^h - t_t^h = \left[w_t^h(t) - t_t^h(t), w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1)\right]$$

- Restricciones de presupuesto

$$c_t^h(t) = w_t^h(t) - t_t^h(t) - l^h(t)$$

cuando joven, y

$$c_t^h(t+1) = w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1) + r(t)l^h(t)$$

cuando viejo

- Restriccion de presupuesto de vida

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} = w_t^h(t) - t_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1)}{r(t)}$$

Equilibrio con impuestos y trasferencias

- Funciòn de ahorro con impuestos y trasferencias: usamos dotacion despues impuestos y trasferencias

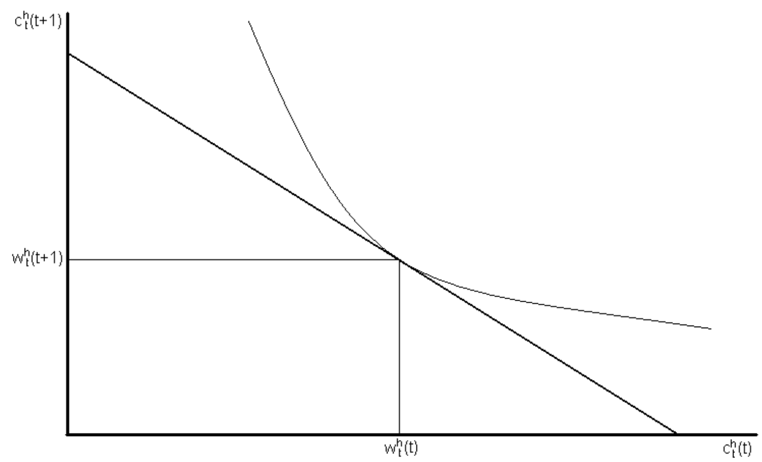
$$a^h(r(t)) = \frac{\beta\left[w_t^h(t) - t_t^h(t)\right]}{(1+\beta)} - \frac{w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1)}{(1+\beta)\,r(t)}$$

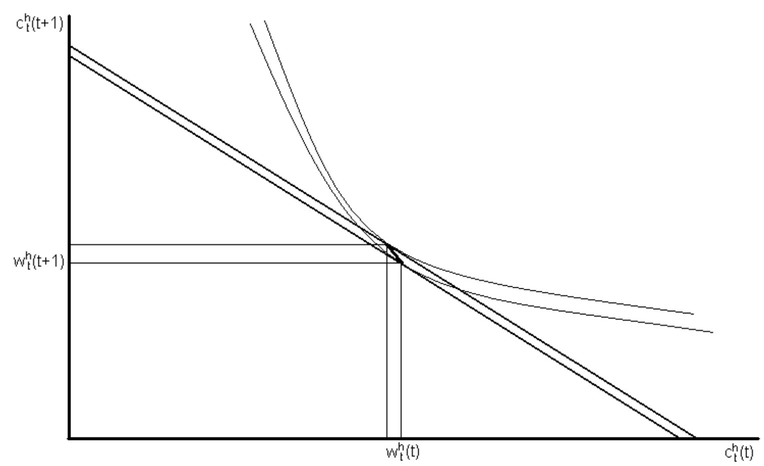
- Condición de equilibrio todavia es

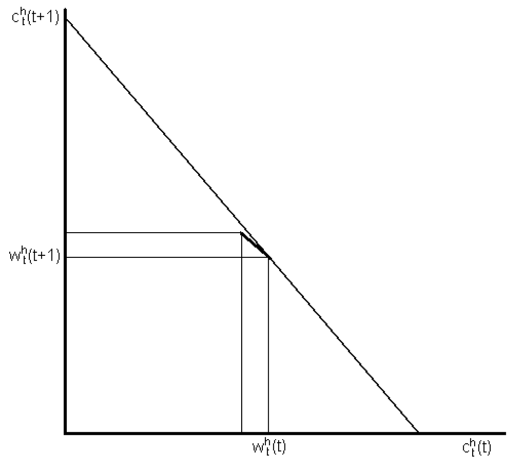
$$S(r(t)) = 0$$

- o, si todo los miembros de una generación son identicas,

$$N(t)\left[\frac{\beta\left[w_t^h(t) - t_t^h(t)\right]}{(1+\beta)} - \frac{w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1)}{(1+\beta)\,r(t)}\right] = 0$$


$c_t^h(t+1)$
$w_t^h(t+1)$
$w_t^h(t)$
$c_t^h(t)$


$c_t^h(t+1)$
$w_t^h(t+1)$
$w_t^h(t)$
$c_t^h(t)$



.Un equilibrio sin impuestos o trasferencias
.Cuando impuestos y trasferencias mejoran utilidad: r(t)<1
.Cuando impuestos y trasferencias bajan utilidad: r(t)>1
.Ejemplo con impuestos y trasferencias

- $N(t) = 100$, $w_t^h = [2, 1]$, $\beta = 1$, $t_t^h = [1/4, -1/4]$
- Restricción de presupuesto del gobierno

$$100 * 1/4 + 100 * (-1/4) = 0$$

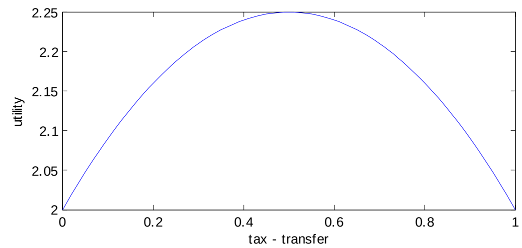
- Condición de equilibrio

$$\begin{aligned} S(r(t)) &= 0 \\ 100\left[\frac{\beta\left[w_t^h(t) - t_t^h(t)\right]}{(1+\beta)} - \frac{w_t^h(t+1) - t_t^h(t+1)}{(1+\beta)\,r(t)}\right] &= 0 \\ 100\left[\frac{[2-1/4]}{(1+1)} - \frac{1-(-1/4)}{(1+1)\,r(t)}\right] &= 0 \\ 100\left[\frac{7/4}{2} - \frac{5/4}{2r(t)}\right] &= 0 \end{aligned}$$

$$r(t) = \frac{5}{7}$$

.Ejemplo

- $N(t) = 100$, $w_t^h = [2, 1]$, $\beta = 1$, $t_t^h = [1/2, -1/2]$



- Condición de equilibrio

$$\begin{aligned} S(r(t)) &= 0 \\ 100\left[\frac{[2-1/2]}{(1+1)} - \frac{1-(-1/2)}{(1+1)\,r\,(t)}\right] &= 0 \end{aligned}$$

- Solución

$$r(t) = 1$$

- impuesto = transferencia y utilidad

Bonos del gobierno

- bonos reales: pagan $B(t)$ unidades de bienes en periodo t+1
- Son bonos de 1 periodo
- El gobierno puede pagar estos bonos con
  - impuestos sobre los jovenes de periodo $t+1$
  - impuestos sobre los viejos de period $t+1$
  - emitir nuevo bonos en periodo $t+1$ $(B(t+1))$
  - una combinación de estos tres
- Restricción de presupuesto en periodo t de gobierno con bonos

$$0 = \sum_{h=1}^{N(t)} t_t^h\,(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} t_{t-1}^h\,(t) - B(t-1) + p(t)B(t)$$

  donde $p(t)$ es el precio de nuevo bonos en periodo t

Restricciones de presupuesto de los individuos con bonos

- Restricciones de los jovenes

$$c_t^h\,(t) = w_t^h\,(t) - t_t^h\,(t) - l^h\,(t) - p(t)b^h(t)$$

cuando joven, y

$$c_t^h\,(t+1) = w_t^h\,(t+1) - t_t^h\,(t+1) + r(t)l^h\,(t) + b^h(t)$$

cuando viejos

- Restricción de presupuesto de la vida

$$c_t^h\,(t) + \frac{c_t^h\,(t+1)}{r\,(t)} = w_t^h\,(t) + \frac{w_t^h\,(t+1)}{r\,(t)} - b^h(t)\left(p(t) - \frac{1}{r(t)}\right)$$

- la misma restriccion de antes pero con

$$-b^h(t)\left(p(t) - \frac{1}{r(t)}\right)$$

.Condición de no arbitraje

- Que valor debe tener

$$p(t) - \frac{1}{r(t)}$$

- Tres posibilidades

$$\begin{aligned} p(t) - \frac{1}{r(t)} &< 0 \\ p(t) - \frac{1}{r(t)} &= 0 \\ p(t) - \frac{1}{r(t)} &> 0 \end{aligned}$$

.Condición de no arbitraje

- Que pasa si

$$p(t) - \frac{1}{r(t)} < 0$$

  - retrono en bonos mas que tasa de interes para prestamos privados
  - Todos quiren pedir prestamos y comprar bonos (cantidad infinito de bonos)
  - no es equilibrio (demasiado demanda para bonos)

- Que pasa si

$$p(t) - \frac{1}{r(t)} > 0$$

  - Nadie quiere comprar bonos (inverten in prestamos privados)
  - insuficiente demanda para bonos

- entonces: condición de no arbitraje es

$$p(t) = \frac{1}{r(t)}$$

y retorno en bonos es igual a retorno en prestamos privados

.Condiciòn de equilibrio en mercado de bonos del gobierno

- Suma restricciones de presupuesto de los jovenes de periodo t

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} t_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} l^h(t) - p(t) \sum_{h=1}^{N(t)} b^h(t)$$

- Nota: en equilibrio

$$\sum_{h=1}^{N(t)} l^h(t) = 0$$

$$\sum_{h=1}^{N(t)} b^h(t) = B(t)$$

y

$$\sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} t_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = S(r(t))$$

- Entonces

$$S(r(t)) = p(t)B(t)$$

.Equilibrio en mercado de bonos del gobierno

- Condición de "market clearing":

$$S(r(t)) = p(t)B(t)$$

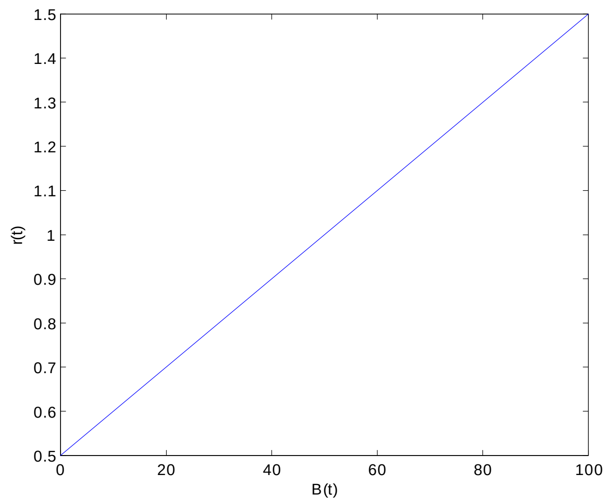
y condición de no arbitraje

$$p(t) = \frac{1}{r(t)}$$

- Busca soluciòn (un $r(t)$) donde

$$S(r(t)) = \frac{1}{r(t)} B(t)$$

.Ejemplo:



- Gobierno emite 10 bonos en periodo 1 y usa los ingresos para trasferencias a miembros de generación 0 (los viejos). Cobra impuesto de los jovenes de generación 2 para pagar los bonos. ¿Cómo es el equilibrio por los miembros de generación 1? $N(1) = 100$, $w_1^h = [2, 1]$, y $\beta = 1$.

- Solución: función de ahorros agregados es

$$S(r(t)) = 100 - \frac{50}{r(t)}$$

- Condición de equilibrio implica

$$100 - \frac{50}{r(t)} = \frac{1}{r(t)}10$$

- Resuelve y

$$r(t) = 0,6$$

.Tasa de interés como función de numero de bonos
.Caracteristicas especiales del ejemplo

1. Ingreso de los bonos va a los viejos de generación 0

2. Los joven de generación 2 paga impuestos para cubrir los bonos

3. Miembros de generación 1 compran y verden los bonos pero no pagan ni impuestos y reciben trasferencias. Mercado de bonos funciona solo para miembros de generación 1.

.Cuantos bonos emite el gobierno para pagar X a los viejos

- Gobierno quiere pagar $X/N(0)$ a cada viejo de periodo 0
- Quiere que el ingreso de venta de bonos en periodo 1 igual $X = p(1)B(1)$
- En esto caso
$$S(r(1)) = X$$
- en la economia del ejemplo:
$$100 - \frac{50}{r(1)} = X$$
$$r(1) = \frac{50}{100 - X}$$
- con esta tasa de interés,
$$p(1) = \frac{100 - X}{50}$$
$$B(1) = \frac{X}{p(1)} = \frac{50X}{100 - X}$$

."Rolling over" bonos

- En periodo 2, el gobierno podría vender nuevos bonos (y no cobrar impuestos)
- Debe vender sufficiente bonos para tener $B(1)$ para pagar bonos de periodo 1.
- Ingresos de venta de bonos es $p(2)B(2)$
- El gobierno quiere vender $B(2)$ bonos donde
$$p(2)B(2) = B(1)$$
- Si quiere "rolling over", en periodo 3 debe vender $B(3)$ para que
$$p(3)B(3) = B(2)$$
- Nota: en esto ejemplo solo los viejos de generación 0 recibe una trasferencia

.Un ejemplo de "rolling over"

- Gobierno emite 10 bonos en periodo 1 y usa los ingresos para trasferencias a miembros de generación 0 (los viejos). Cobra impuesto de los jovenes de generación 2 para pagar los bonos. ¿Cómo es el equilibrio? $N(t) = 100$, $w_t^h = [2, 1]$, y $\beta = 1$.

- Solución
  - Periodo 1 es como antes:

$$S(r(1)) = p(1)B(1)$$

or

$$100 - \frac{50}{r(1)} = \frac{1}{r(1)}10$$

.

- En periodo 2,

$$p(2)B(2) = B(1) = 10$$

o

$$S(r(2)) = 10$$

y

$$100 - \frac{50}{r(2)} = 10$$

  - Entonces

$$r(2) = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

y

$$B(2) = \frac{10}{p(2)} = \frac{50}{9}$$

.

- En periodo 3,

$$p(3)B(3) = B(2) = \frac{50}{9}$$

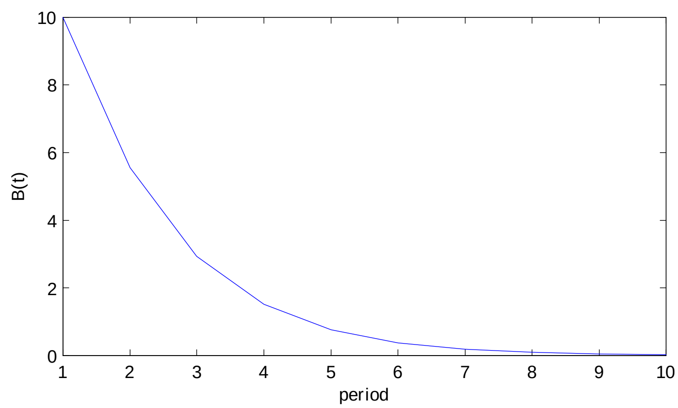
- Resuelve y

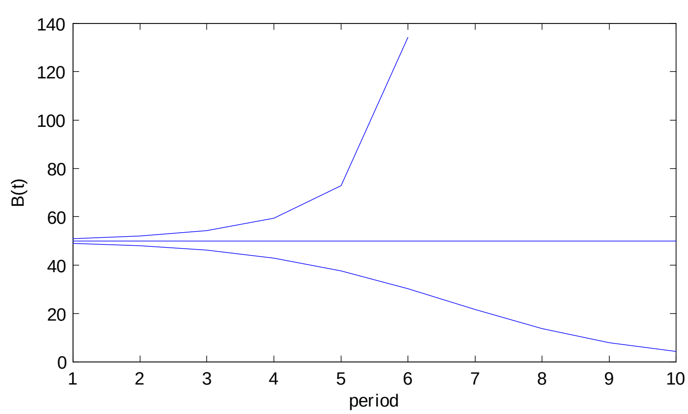
$$B(3) = \frac{50}{17}$$

- Sigiendo

.Camino de "rolling over" como función de X

- Si $X > 50$, no hay equilibrio con "rolling over"


10
8
6
4
2
0
B(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
period


140
120
100
80
60
40
20
0
B(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
period