

# Opciones reales

Buenos Aires, 4 de septiembre de 2003

Dr. Guillermo López Dumrauf

[dumrauf@fibertel.com.ar](mailto:dumrauf@fibertel.com.ar)

# Ejemplo de una opción de abandono (\*)

La compañía X está estudiando la compra de un “*ferryboat*” de alta velocidad para proveer un servicio de transporte ejecutivo por el Río de la Plata, en el trayecto que une las ciudades de Tigre, al norte y La Plata, al sur, con la Capital Federal.

La empresa dispone de dos cotizaciones finales: un barco de europeo de marca internacional reconocida cuyo costo es de 7 millones y otro de origen oriental de marca desconocida cuyo costo es de 6,5 millones.

(\*) Mi agradecimiento para el Dr. Jorge del Aguila, del Instituto Argentino de Ejecutivos de Finanzas (IAEF) por proveerme de este didáctico ejemplo.

# Ejemplo de una opción de abandono

El barco europeo tiene un **valor de reventa de 6,1 millones** al cabo de un año de uso, en cambio el barco oriental no tendría valor de reventa alguno.

# Ejemplo de una opción de abandono

## Escenario con demanda alta (Probabilidad 40%)

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor continuo
Ingresos x ventas		5000	5600	6320	7200	8272	
Costos variables		-2500	-2800	-3160	-3600	-4100	
Costos fijos		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	
EBIT		<b>1500</b>	<b>1800</b>	<b>2160</b>	<b>2600</b>	<b>3172</b>	
Depreciación		500	500	500	500	500	
Impuesto a las ganancias (35%)		-525	-630	-756	-910	-1110,2	
Capex		-30	-40	-50	-55	-60	
Variaciones capital de trabajo		-20	-30	-40	-40	-40	
Otros ingresos/Otros egresos		-275	-214	-142	-77	-5	
<b>Free Cash Flow</b>		<b>1150</b>	<b>1386</b>	<b>1672</b>	<b>2018</b>	<b>2456,8</b>	<b>8000</b>
Factor de descuento 15%		1,2	1,3	1,5	1,7	2,0	2,0
PV		1000,0	1048,0	1099,4	1153,8	1221,5	3977,4
PV Free Cash Flow	9500,1	<b>8500,1</b>	7452,0	6352,7	5198,9	3977,4	0,0

## Escenario con demanda baja (Probabilidad 60%)

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Valor continuo
PV		-450	750	900	900	900	2000
PV Free Cash Flow	5000,0	<b>5450,0</b>	4700,0	3800,0	2900,0	2000,0	

Al final del primer año, si la demanda de servicios es alta el negocio valdrá 8,5 millones y si la demanda es baja, el negocio sólo valdrá 5,45 millones...

# Ejemplo de una opción de abandono

Los expertos estiman que existe una probabilidad del 40% de que la demanda sea alta y por lo tanto calculan el valor esperado del proyecto a partir del valor presente del free cash flow:

$$\text{Valor esperado (PV FCF)} = 0,40 \times 8,5 + 0,60 \times 5 = 6,8 \text{ millones}$$

En estas condiciones el VAN del proyecto sería negativo con el barco europeo ( $6.800.000 - 7.000.000 = - 200.000$ )

y positivo con el barco oriental ( $6.800.000 - 6.500.000 = 300.000$ )

# Ejemplo de una opción de abandono

No obstante, el presidente está inquieto porque aunque podría ganar más con el barco oriental, si todo sale mal perdería su capital, mientras que con el barco europeo podría recuperar gran parte de su inversión. Se trata entonces de saber cuánto vale la flexibilidad del proyecto con el barco europeo.

# Ejemplo de una opción de abandono

Si el negocio anda mal el primer año, la compañía podrá vender el barco usado en 6,1 millón en lugar de quedarse con un negocio que sólo valdrá 4,5 millones.

**La compañía posee una acción que vale 6,8 millones (que podrá valer dentro de un año entre 5,45 y 8,5 millones) y una opción de venta (abandono) con un precio de ejercicio de 6,1 millones a un año de plazo.**

# Ejemplo de una opción de abandono

Para calcular cuánto vale el negocio hoy, tenemos que sumar al valor sin flexibilidad (obtenido mediante DCF), el valor del “put” (el valor de la opción real de abandono)

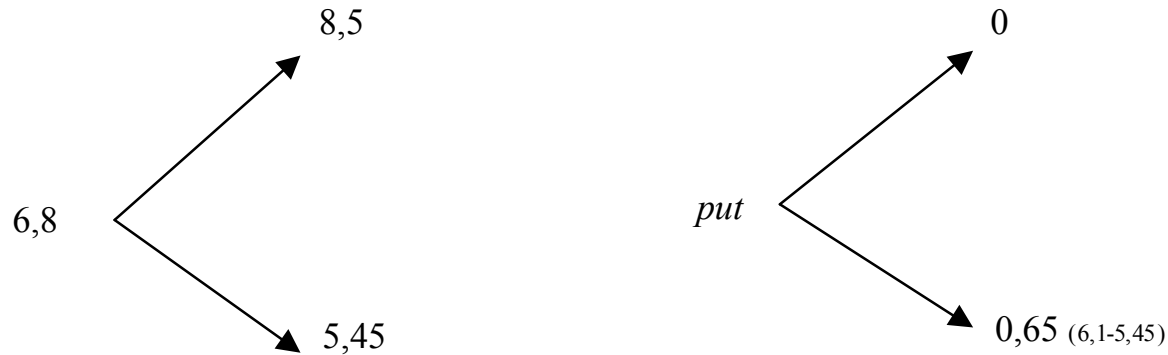
# Ejemplo de una opción de abandono

La opción de abandono se puede calcular mediante el método binomial, el método del portafolio replicado o con...¿la fórmula de Black-Scholes? Los datos son los siguientes:

- ◆ Precio de ejercicio: 6,1 millones
- ◆ Tasa de interés libre de riesgo: 7% anual
- ◆ Precio del activo subyacente: 6,8 millones

# Ejemplo de una opción de abandono

Si a la fecha de ejercicio (dentro de un año) el negocio tiene éxito la opción vale cero, ya que no vendería en 6,1 millones un negocio que vale 5,5 millones. Si en cambio el negocio fracasa, la opción vale \$ 650.000 ( 6,1 millones – 5,45 millones):



Como nos interesa saber cuál es el valor de la opción de abandono hoy, aplicamos la fórmula de las probabilidades neutras. Siendo:

$$u = 8,5/6,8 = 1,25$$

$$d = 5,45/6,8 = 0,80$$

$$p = \frac{(1+rf) - d}{u - d} = \frac{1,07 - 0,80}{1,25 - 0,80} = 0,60 \quad \text{y } 1-p = 0,40$$

$$put = \frac{cu.p + cd.(1-p)}{(1+rf)} = \frac{0 \times 0,60 + 0,65 \times 0,40}{(1,07)} = 0,24 \text{ millones}$$

# Ejemplo de una opción de abandono

Por lo tanto, el valor del negocio con flexibilidad es:

*$PV \text{ con flexibilidad} = PV \text{ sin flexibilidad} + \text{valor de la opción de abandono} = 6,8 + 0,24 = 7,04 \text{ millones}$*

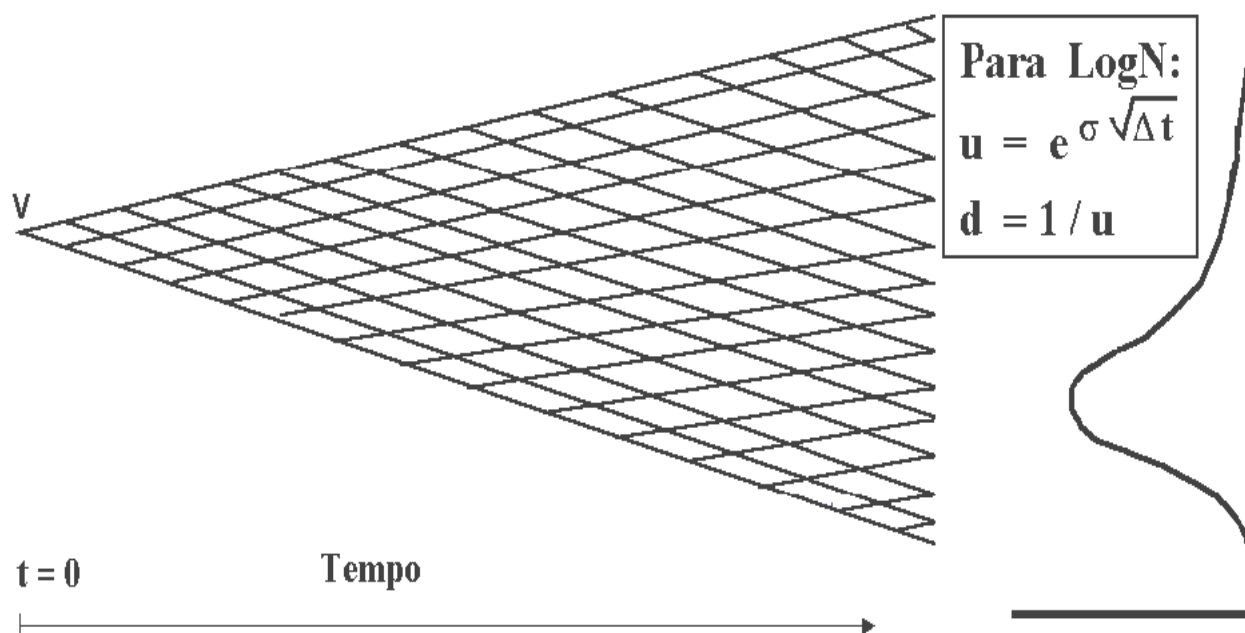
# Ejemplo de una opción de abandono

Estos modelos son claramente irreales y se utilizan sólo para propósitos ilustrativos.

Un modelo más realista es el que supone que los movimientos del precio del activo están compuestos por un gran número de pequeños movimientos binomiales. Esta es la hipótesis que subyace en el procedimiento numérico que fu propuesto por primera vez por Cox, Ross y Rubinstein.

# Árbol binomial y distribución lognormal

La amplitud de un árbol binomial dependerá del tamaño del coeficiente de ascenso y del número de intervalos de tiempo en que se descompone. Si por ejemplo, dividiéramos nuestro árbol binomial en varios períodos de tiempo a lo largo de la vida de la opción, este se vería como lo muestra la siguiente figura



Fuente: G. L. Dumrauf “Finanzas Corporativas” (2003)

Copyright by Grupo Guía S.A.

# Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes sigue los mismos supuestos que el modelo binomial pero considera que el precio del activo se distribuye según una normal logarítmica por lo que su varianza es proporcional al tiempo. Los supuestos del modelo son los siguientes:

1. El precio del activo sigue una distribución normal logarítmica
2. El valor de los rendimientos es conocido y proporcional al paso del tiempo
3. No hay costos de transacción
4. La tasa de interés libre de riesgo es constante (supone una estructura temporal plana)
5. El activo no paga dividendos
6. Las opciones son de tipo europeo

Fuente: G. L. Dumrauf “Finanzas Corporativas” (2003)

Copyright by Grupo Guía S.A.

# Valuación por Black-Scholes

Las fórmulas de Black-Scholes para los precios de opciones europeas de compra que no distribuyen dividendos son:

$$p = Ee^{-rf.T} N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$c = SN(d_1) - Ee^{-rf.T} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + r_f T}{\sigma \sqrt{T}} + 0,5\sigma \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Aplicando Black-Scholes a nuestro ejemplo, tenemos:

$$d_1 = \frac{\ln(6,8/6,1) + 0,07 \times 1}{0,2235\sqrt{1}} + 0,5 \times 0,2235 \times \sqrt{1} = 0,9108$$

$$d_2 = 0,9108 - 0,2235\sqrt{1} = 0,6873$$

$$p = 6,1e^{-0,07 \times 1} N(-0,6873) - 6,5 N(-0,9108)$$

$$p = 6,1e^{-0,07 \times 1} 0,245 - 6,8 \times 0,18 = 0,17 = \$170.000$$

# Ejemplo de una opción de abandono

El valor de la opción de abandono es de \$ 170.000 y no de \$ 240.000 como habíamos calculado. La diferencia es producto de aplicar el método binomial en un solo paso. Al trabajar con variables continuas la fórmula de B&S provee un camino simplificado para resolver el modelo binomial haciendo el número de pasos infinitamente grande y el tamaño de los movimientos de precios hacia arriba y hacia abajo en cada paso, infinitamente chico.

# Ejemplo de una opción de abandono

Utilizando el método binomial pero aumentando el número de subperíodos por año (más pasos en el árbol) los resultados convergen a Black-Scholes.

# Ejemplo de una opción de abandono

Un activo cuyos rendimientos se distribuyen normalmente tiene una varianza que es constante en cada período. Así, la varianza del período es  $\sigma^2$ , la varianza para  $t$  años será  $\sigma^2 t$ . Mientras que el desvío típico será:

$$\sigma\sqrt{t}$$

**En los coeficientes de alza y de baja hay implícita una volatilidad en el precio de la acción.** Si esta volatilidad es continua, entonces podemos relacionar los coeficientes de alza y de baja con el desvío standard para un número infinito de subperíodos de tiempo donde entonces la variabilidad se produce en forma compuesta continua, siendo representados los coeficientes de alza y de baja por sus equivalentes continuos:

$$(1+u) = e^{\sigma\sqrt{T}}$$

Y el cambio a la baja  $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{T}}$

Así, por ejemplo, si  $S=6,8$ ;  $\sigma=0,223$ ;  $t=0,166666$   $rf=7\%$

$$(1+u) = e^{0,2231\sqrt{0,166}} = 1,0953 \quad \text{y} \quad d = e^{-0,2231\sqrt{0,1666}} = 0,912$$

# Ejemplo de una opción de abandono

Finalmente, recalculando las probabilidades “hedge”  $p$  y  $1-p$ , y la tasa libre de riesgo para un árbol que tiene 6 pasos (6 movimientos bimestrales) podemos diseñar una planilla de cálculo para calcular el valor de la opción de venta (abandono)

# Ejemplo de una opción de abandono

Para 24 pasos (un árbol con movimientos quincenales) el valor de la opción por el método binomial es de \$ 195.600

# Ejemplo de una opción de abandono

Tasa libre de riesgo	3,500%	$u$	1,1708
Valor activo subyacente	6,8	$d$	0,8541
Precio de ejercicio	6,1		

## Arbol de eventos del activo subyacente

	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>0</b>	6,8	7,96	9,32
<b>1</b>		5,80799	6,8
<b>2</b>			4,96

## Valor de la opción

	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>0</b>	0,1956	0,00	0,00
<b>1</b>		0,47	0,00
<b>2</b>		0,00	1,14

# Black&%Scholes vs. binomial

¿Es apropiado utilizar Black-Scholes para opciones reales?

No, ya que no puede utilizarse para valorar la mayoría de las opciones americanas (en las americanas, el ejercicio es posible antes del vencimiento)

Desde el punto de vista de quien practica, la ventaja es que la matemática discreta es de una naturaleza algebraica más amigable para un ambiente de “management” y más fácil de entender que las ecuaciones diferenciales estocásticas.