

## Trabajo Práctico N° 2 Economía Laboral

Profesor: Julio J. Elías

Profesora Asistente: Candelaria Escuti

La resolución del trabajo práctico deberá presentarse el jueves 20 de agosto al inicio de la clase práctica.

1. Resolver todos los ejercicios impares del capítulo 2 del libro de Borjas “Labor Economics” (McGraw-Hill, Fourth Edition, 2007).

### 2. Estadísticas del Mercado Laboral (Continuación)

- a) Calcule el desvío estándar de las variables calculadas en los ítems a), b), c) y d) del punto 1 del trabajo práctico 1.
- b) Calcule para hombres y mujeres por separado la correlación entre:
  - a. La participación laboral y la edad de las personas.
  - b. La participación laboral y los años de educación de las personas.
  - c. La participación laboral y el estatus matrimonial (Casada o no casada).
- c) Comente sus resultados en a) y en b).

### 3. El método de los multiplicadores de Lagrange

Generalmente, en economía trabajamos con modelos que involucran optimización con restricciones. Por ejemplo, en el problema de elección del consumidor nos interesa encontrar la canasta de mercado que maximiza el bienestar del consumidor (i.e., la función de utilidad) sujeto a su restricción presupuestaria (i.e., la canasta de mercado óptima tiene que ser accesible). En este trabajo práctico estudiaremos (o repasaremos) un método, el método de los multiplicadores de Lagrange, que permite encontrar la solución a este tipo de problemas.

Como mencionamos anteriormente, la mayoría de los problemas en economía poseen la siguiente estructura

Maximizar  $F(X_1, X_2, \dots, X_k, B)$  sujeto a  $G(X_1, X_2, \dots, X_k, B) = M$

eligiendo  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$

en donde nos referimos a la función  $F$  como la “función objetivo” y  $G$  como la “función restrictiva”.

Por ejemplo, en el problema de elección del consumidor con dos bienes,  $F$  y  $C$ , el problema del individuo es el siguiente

Maximizar  $U(F, C)$  sujeto a  $P_F F + P_C C = I$

eligiendo  $F$  y  $C$

En este caso en particular la función de utilidad es la función objetivo y la restricción presupuestaria es la función restrictiva.

A continuación, mostraremos como encontrar la solución a este problema (para el caso de dos variables). Pero el método es más general, ya que permite resolver el problema cuando están envueltas más de dos variables. La solución del problema del consumidor que se describe arriba puede encontrarse mediante la maximización de la siguiente función, conocida como la función Lagrangiana

$$L = U(F, C) + \lambda [I - (P_F F + P_C C)] \quad (1)$$

en donde el multiplicador,  $\lambda$  (el “multiplicador de Lagrange”), nos da el aumento de la utilidad (la función objetivo) como consecuencia del aumento en \$1 del ingreso (el nivel de la restricción) o lo que llamaremos la utilidad marginal del ingreso. La solución para los niveles de  $F$  y  $C$  estará dada en el punto en donde las derivadas de la función Lagrangiana con respecto  $F$ ,  $C$  y  $\lambda$  son simultáneamente cero. Nos referimos a estas condiciones como las “condiciones de primer orden”. Por lo tanto estas condiciones son

$$\frac{\partial L}{\partial F} = \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F} - \lambda * P_F = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F} = \lambda * P_F \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C} - \lambda * P_C = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C} = \lambda * P_C \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - P_F F^* - P_C C^* = 0 \Rightarrow P_F F^* - P_C C^* = I \quad (4)$$

Las primeras dos ecuaciones nos indica que la solución óptima requiere que el impacto de cada variable en la función objetivo,  $\frac{\partial U(F, C)}{\partial F}$  y  $\frac{\partial U(F, C)}{\partial C}$ , sea proporcional al efecto sobre la función restrictiva,  $P_F$  y  $P_C$ , siendo lambda ( $\lambda$ ) el factor de proporcionalidad. La necesidad de estas condiciones siguen el siguiente argumento: si aumentamos  $F$  en una

pequeña cantidad  $dF$  entonces el valor de la función restrictiva caería en  $P_F dF$  lo que obligaría al individuo a cambiar  $C$  en una cantidad  $-\frac{P_F}{P_C}dF$ , para mantener el valor de  $P_F F + P_C C$  igual a  $I$ . El efecto neto de esto en la función objetivo sería

$$dU = \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F} dF - \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C} \frac{P_F}{P_C} dF \quad (5)$$

En el óptimo,  $dU$  tiene que ser cero (i.e. no existe la posibilidad de mejorar el bienestar del individuo mediante una reasignación del gasto en  $F$  y  $C$ ) lo que implica que

$$\frac{\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F}}{\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C}} = \frac{P_F}{P_C} \quad (6)$$

o que los efectos de  $F$  y  $C$  en la función objetivo ( $U(F, C)$ ) tiene que ser proporcional a su efecto sobre la restricción.

Las 3 condiciones de primer orden (ecuaciones 2, 3 y 4) nos dan un sistema de 3 ecuaciones en 3 incógnitas,  $F$ ,  $C$  y  $\lambda$ . Podemos resolver para los valores óptimos de  $F$  y  $C$  utilizando las condiciones de optimalidad. Como las condiciones de primer orden dependen de los parámetros del modelo,  $I$ ,  $P_F$  y  $P_C$ , las soluciones de  $F$ ,  $C$  y  $\lambda$  también serán funciones de  $I$ ,  $P_F$  y  $P_C$ . Esto es

$$F = F^*(P_F, P_C, I) \quad (7)$$

$$C = C^*(P_F, P_C, I) \quad (8)$$

$$\lambda = \lambda^*(P_F, P_C, I) \quad (9)$$

### *Estática comparativa*

Generalmente, en economía estamos interesados en analizar el efecto de cambios en los parámetros del modelo sobre las variables endógenas. Por ejemplo, en el modelo de elección del consumidor es interesante analizar el efecto de un cambio en el ingreso del consumidor sobre su elección óptima. Diferenciando el sistema se obtiene

$$\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F^2} dF + \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F \partial C} dC - P_F d\lambda = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C \partial F} dF + \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C^2} dC - P_C d\lambda = 0 \quad (11)$$

$$P_F dF + P_C dC = dI \quad (12)$$

o

$$\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F^2} \frac{dF}{dI} + \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial F \partial C} \frac{dC}{dI} - P_F \frac{d\lambda}{dI} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C \partial F} \frac{dF}{dI} + \frac{\partial U(F^*, C^*)}{\partial C^2} \frac{dC}{dI} - P_C \frac{d\lambda}{dI} = 0 \quad (14)$$

$$P_F \frac{dF}{dI} + P_C \frac{dC}{dI} = 1 \quad (15)$$

Nuevamente tenemos un sistema de 3 ecuaciones (ecuaciones 13, 14 y 15) en 3 incógnitas,  $\frac{dF}{dI}$ ,  $\frac{dC}{dI}$  y  $\frac{d\lambda}{dI}$ , que se puede resolver, por ejemplo, con el método de la regla de Cramer.

**A.** Una función de utilidad que se utiliza frecuentemente en la teoría de elección del consumidor es la función de utilidad Cobb-Douglas que se representa con la siguiente función

$$U(X, Y) = X^\alpha Y^{1-\alpha}$$

Para el propósito de este ejercicio asumiremos que las preferencias del individuo están representadas por la siguiente función de utilidad Cobb-Douglas

$$U(F, C) = F^\alpha C^{1-\alpha}$$

Adicionalmente asuma que el individuo tiene ingreso  $I$  y que los precios de  $F$  y  $C$  están dados por  $P_F$  y  $P_C$  respectivamente.

El problema del individuo es el de maximizar su utilidad, eligiendo  $F$  y  $C$ , sujeto a su restricción presupuestaria.

- a) Escriba la función Lagrangiana de este problema.
- b) Calcule las condiciones de primer orden.

- c) Resuelva para los niveles óptimos de F y C.
- d) Calcule la elasticidad precio de las demandas de F y C.
- e) Calcule la elasticidad cruzada de las demandas de F y C.
- f) Calcule la elasticidad ingreso de las demandas de F y C.

Asuma ahora que en la economía hay N individuos iguales.

- g) Calcule la demanda de mercado de F y C.
- h) Calcule la elasticidad precio de las demandas de F y C.

Asuma ahora que la función de utilidad es de la forma Cobb-Douglas pero tiene  $n$  bienes.

Es decir

$$U(X_1, \dots, X_n) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{1-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}}$$

Adicionalmente asuma que el individuo tiene ingreso  $I$  y que los precios de  $X_1, \dots, X_n$  están dados por  $P_1 \dots P_n$  respectivamente.

- i) Escriba la función Lagrangiana de este problema.
- j) Calcule las condiciones de primer orden.
- k) Resuelva para los niveles óptimos de  $X_i \ i = 1, \dots, n$ .

#### 4. Oferta de Trabajo

##### *Modelo Estático de Oferta de Trabajo*

Considere el siguiente modelo estático de oferta de trabajo. Un individuo vive por un período y tiene la siguiente función de utilidad

$$u(c, l) = c^{1-\alpha} l^\alpha$$

en donde  $c$  es consumo,  $l$  horas de ocio y  $T$  es la dotación de horas de tiempo que posee disponibles el individuo.

- a) Escriba la restricción presupuestaria del individuo asumiendo que el individuo posee ingresos no salariales  $A$ .
- b) Escriba el Lagrangiano de este problema.

- c) Calcule las condiciones de primer orden.
- d) Derive la oferta de trabajo del individuo.
- e) Calcule la elasticidad de la oferta de trabajo. ¿De qué variables depende?
- f) Calcule el salario de reserva. ¿De qué variables depende?
- g) Analice el efecto de un impuesto al ingreso laboral sobre la oferta de trabajo, el salario de reserva y el consumo.
- h) Analice el efecto de un impuesto sobre el consumo sobre la oferta de trabajo, el salario de reserva y sobre el consumo. Compare con g).
- i) Analice el efecto de un impuesto al ingreso no laboral sobre la oferta de trabajo, el salario de reserva y el consumo. Compare con g) y h).

Asuma que existen 1000 individuos idénticos en la economía.

- j) Calcule la oferta de trabajo agregada.
- k) Calcule la elasticidad de la oferta de trabajo agregada.

Ahora asuma que la demanda agregada de trabajo por parte de las firmas es inelástica e igual a 1000 horas.

- l) Calcule el salario de equilibrio, el nivel de consumo y las horas de trabajo individuales.
- m) Calcule el salario de equilibrio, el nivel de consumo y las horas de trabajo individuales asumiendo que se impone un impuesto al ingreso laboral.
- n) ¿Quién paga el impuesto? ¿Las firmas o los trabajadores?
- o) Calcule el salario de equilibrio, el nivel de consumo y las horas de trabajo individuales asumiendo que se impone un impuesto al ingreso no laboral.
- p) ¿Quién paga el impuesto? ¿Las firmas o los trabajadores?

Ahora asuma que hay heterogeneidad entre los individuos de acuerdo al ingreso no laboral que poseen. 500 individuos poseen un ingreso no laboral  $A_l$  y 500 un ingreso no laboral  $A_h > A_l$ .

- q) Calcule la elasticidad de la oferta de trabajo. ¿De qué variables depende? Compare con k).
- r) Calcule el salario de equilibrio, las horas trabajadas y los niveles de consumo para ambos grupos.
- s) Calcule el nivel de bienestar para ambos grupos.
- t) Calcule el salario de equilibrio, el nivel de consumo y las horas de trabajo individuales para ambos grupos asumiendo que se impone un impuesto al ingreso no laboral de los ricos únicamente.
- u) Asumiendo que el impuesto es igual a  $(1 - t) = A_l/A_h$  ¿Quiénes están mejor? ¿Los ricos o los pobres? ¿Y en relación a la situación sin impuestos (i.e. compare con r))?